

Николай Камардин

ДАВАЙТЕ СДЕЛАЕМ ОТКРЫТИЕ

Часть I

www.presdrop.ru

*Моим Викториям – жене и дочери
с любовью и благодарностью
п о с в я щ а ю.*

Оглавление

Предисловие	4
1. Введение	5
Глава 1. Свойства капли жидкости	
2. Геометрия поверхности капли. Контактные давления.....	8
3. Деформация капли. Ячейка.....	14
4. Зависимость давления в капле от ее формы. Индекс ячейки.....	25
5. Энергия деформированной капли.....	36
6. Совместная деформация капель.....	48
Глава 2. Регулярная система сжатых капель	
7. Плотная упаковка шаров.....	60
8. Ромбододекаэдр.....	68
9. Регулярная структура системы сжатых капель.....	75
Глава 3. Искаженная система сжатых капель	
10. Искажение структуры системы.....	84
11. Построение формы искаженных ячеек.....	97
12. Геометрические закономерности искаженной структуры.....	105
13. Истинная форма искаженных ячеек. Повышение давления вокруг искажающего тела.....	114
14. Работа искажения.....	125
15. Взаимное влияние искажающих тел.....	131
Глава 4. Кластеры элементов	
16. Свойства множеств ромбододекаэдров.....	146
17. Кластер элементов.....	152
18. Энергетические особенности искажающих тел, представленных кластерами.....	161
19. Геометрические особенности искажающих тел, представленных кластерами.....	168
20. Эволюция системы.....	173
Послесловие к первой части.....	181
Литература.....	182
Предметный указатель.....	183
Перечень гипотез.....	185

Предисловие

Жанр этой книги необычный. Судя по названию – это научно-популярное произведение. И действительно, несмотря на множество формул и графиков, здесь нет строгих доказательств и исчерпывающего исследования какого-либо вопроса – все признаки научно-популярного изложения. Тогда в чем же ее необычность?

Всем известно, что цель научно-популярной литературы – просто и понятно рассказать о достижениях науки и о проблемах, которые перед ней стоят. В этой же книге изложено такое, чем наука еще никогда не занималась.

Если говорить о физике, то принцип ее развития можно описать кратко: человек встречался с неизвестным явлением природы и искал ему объяснение на основе уже достигнутых знаний. Таким образом, толчком к новым исследованиям всегда служило наблюдаемое явление.

Другая наука – математика почти всегда, за исключением первого времени своего становления, развивалась сама по себе. Благодаря абстрактной природе ее объектов, в ней ставились и решались проблемы, создавались и усложнялись теории, часто не имеющие отношения к реальному миру, но ее аппарат использовался прикладными науками.

В данной книге впервые сделана попытка создать абстрактный раздел физики, который, будучи разработанным во всех деталях, мог бы быть использован реальной физикой. Оказалось, что можно представить физический объект, который, хотя и не наблюдается в окружающем нас мире, тем не менее может быть смоделирован и исследован, как и реальный. Объект этот – особая система тел, которая подчиняется всем известным физическим законам и поддается полному качественному и количественному исследованию. Начало этого исследования и излагается в данной книге.

Зачем нужно исследовать физическую систему, не наблюдаемую в природе? Во-первых, ненаблюдаемость объекта еще не означает, что он вообще не существует. Во-вторых, автору представляется более естественным, если бы при объяснении реального мира физики-теоретики обращались бы не к абстрактной математической модели, а к физической, даже если эта модель на данный момент тоже кажется абстрактной.

Ввиду условности предлагаемой системы почти единственным методом ее изучения являлось исследование ее компьютерной модели. Качественная правильность результатов, полученных на этой модели, не вызывает у автора никаких сомнений, но при теоретической разработке вопроса многое потребует строгого математического доказательства.

В процессе работы над книгой автор встретился с такими задачами, касающимися в частности геометрии, которые до сих пор не только не решены, но еще не сформулированы. В связи с этим книга, несомненно, будет интересна школьникам старших классов, студентам, начинающим (и не только начинающим) математикам и физикам, которые хотели бы проложить свой собственный путь в науке, решать задачи, которые до них не решал никто. Именно для таких читателей в конце книги приведен перечень гипотез, которые использовались в данной работе.

Другая же категория читателей, для которых наука – не профессия, а увлечение, желающие познать природу и небезразличные к будущему физики, тоже найдут в этой книге пищу для размышлений. Если же кого-то отпугивает обилие формул – смело пропускайте их – это нисколько не повлияет на восприятие основной идеи.

Может случиться, что кому-то покажется излишним знакомство с предварительным материалом в начале этой книги, и он захочет быстрее узнать самую суть. Тогда, после знакомства с Введением, можно сразу переходить к разделу 10, где как раз начинается самое главное.

Итак, приступим.

1. Введение

Сейчас мы познакомимся с системой материальных тел, которая, несмотря на свою простоту, еще ни разу не исследовалась. Представим себе множество одинаковых капель жидкости, распределенных в некотором пространстве в невесомости, как если бы в космическом корабле распылили воду, и она свободно плавала бы в воздухе в виде маленьких шариков.

Чтобы собрать все эти шарики вместе, окружим их эластичной оболочкой, и будем равномерно сдавливать ее со всех сторон, выпуская воздух, а оставляя капли внутри. Оболочка, постепенно сжимаясь, соберет все капли до касания друг с другом, а они, как и положено реальной жидкости, сольются вместе при соприкосновении. Но это слияние нам совсем не нужно, т.к. в результате мы не получим той системы тел, о которой собираемся вести речь.

Чтобы такая система образовалась, нам придется отказаться от привычных представлений о жидкости, и принять, что наши капли не сливаются вместе при соприкосновении, а продолжают оставаться самостоятельными жидкими телами. Для этого достаточно допустить, что эта жидкость не обладает смачиванием, но сохраняет все остальные свойства реальных жидкостей – поверхностное натяжение, внутреннее гидростатическое давление, плотность, текучесть, несжимаемость. Однако есть еще одно свойство, которым должна обладать жидкость наших капель – она должна быть идеальной, т.е. не имеющей внутреннего трения – вязкости.

Обладая таким необычным свойством – отсутствием смачивания, все капли внутри оболочки просто соберутся вместе, касаясь друг друга. Поскольку они абсолютно гладкие (поверхностное натяжение «выгладило» их поверхности), сил трения между ними не возникает. В этих условиях все капли должны занять положение сфер в плотной упаковке – каждая такая сфера касается 12 своих ближайших соседей и неподвижна, так как двигаться ей, как отдельному телу, уже некуда. Этот момент показан на рис. 1.1.

Если бы это были не мягкие капли, а жесткие шары, то на этом все бы и закончилось – при увеличении внешнего давления на оболочку ничего бы не менялось – шары бы оставались шарами и только росли бы контактные силы между ними. Но наши шары – жидкие и могут деформироваться дальше, по мере сжатия оболочки.

Очевидно, чем большее давление на оболочку мы приложим, тем плотнее капли будут прижаты друг к другу и тем сильнее они будут деформированы. Но если еще раз взглянуть на рисунок 1.1, то можно заметить, что условия деформации не у всех капель одинаковые – те из них, которые непосредственно касаются оболочки, должны деформироваться иначе, чем их «собратья», которые со всех сторон окружены такими же каплями, и оболочки не касаются. Да и у этих – внутренних, но расположенных близко к стенке – могут быть некоторые неравномерности условий сжатия. Неравномерности эти должны угасать по мере продвижения вглубь нашего множества и на некотором расстоянии от границы их вообще можно не учитывать. Поэтому в рассматриваемом множестве выделим внутреннюю зону, где условия сжатия можно считать одинаковыми для всех капель. Назовем эту зону *регулярной*, в отличие от другой зоны – *переходной*, в которой сказываются граничные эффекты способа сжатия всего множества. В дальнейшем мы будем иметь дело только с регулярной зоной, и нас не будет интересовать сам способ сжатия и то, что происходит в переходной области.

По мере дальнейшего сжатия форма каждой капли в регулярной зоне все больше будет приближаться к некоторому многограннику с плоскими гранями и прямыми ребрами, как показано на рис.1.2. Только ребра и вершины эти не могут быть острыми – они всегда останутся скругленными, а радиус этих скруглений, хотя и уменьшается с ростом сжатия всей системы, всегда будет больше нуля.

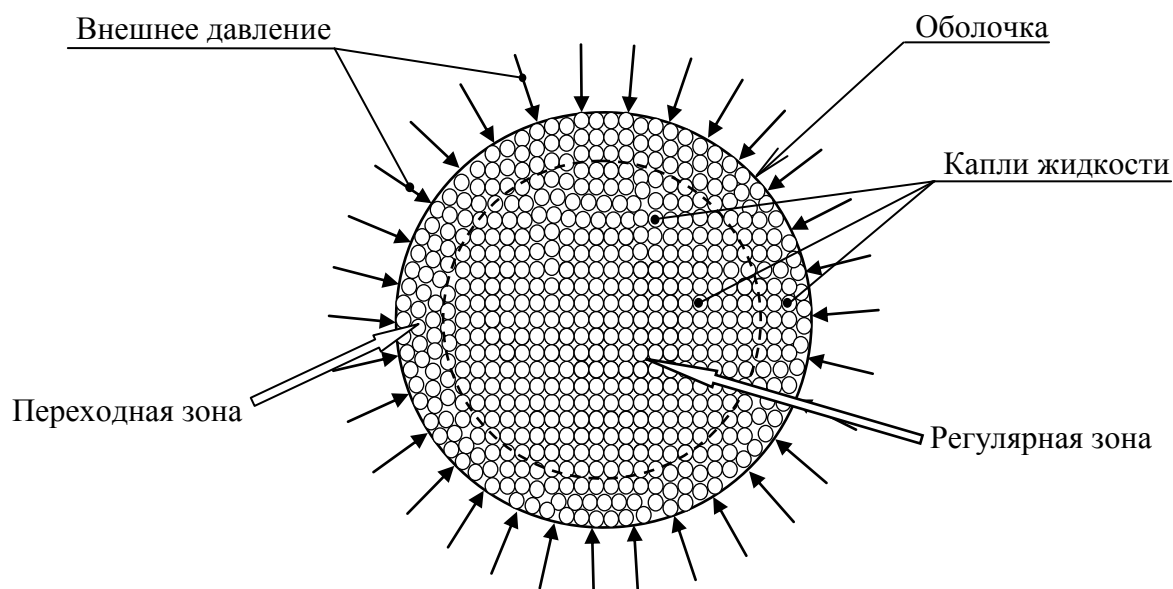


Рис.1.1. Множество капель, подвергнутое внешнему сжатию.

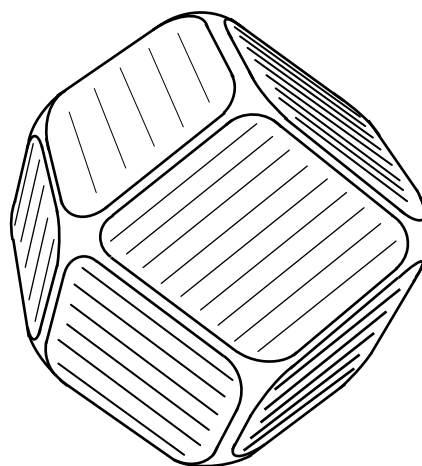


Рис.1.2. Форма сжатой капли в регулярной зоне

Таким образом, мы продемонстрировали систему материальных тел, о которой будет рассказываться в этой книге. Теперь сформулируем это кратко: мы будем изучать свойства множества сжатых совместно одинаковых несливающихся капель идеальной жидкости в регулярной зоне; при этом механизм, способ и причины, вызывающие это сжатие, останутся за рамками нашего рассмотрения. Такое множество мы будем просто называть *системой сжатых капель*.

Данная система состоит из жидких тел. Особенностью этих тел является то, что их форма определяется только геометрическими условиями окружения, и не зависит от физических параметров самой жидкости. Это позволяет выделить изучение поверхности таких объектов в отдельный раздел - *геометрию жидких тел*. Если обычная геометрия в подавляющем большинстве случаев имеет дело с абсолютно жесткими объектами (когда

рассматриваются тела, поверхности, линии, плоскости и т.п.), и на этом единственном физическом требовании к ним построена вся система этой науки, то геометрия жидких тел предъявляет единственное требование к природе своих объектов – это должны быть объемы жидкости.

Форма поверхности отдельно взятого жидкого тела, как уже сказано, зависит от тел, с которыми оно соприкасается. Например, форма капли, сжатой в прямом параллелепипеде плоскими жесткими стенками, определяется соотношением ее объема и трех размеров – длины, ширины и высоты параллелепипеда, которые друг от друга не зависят. Напротив, множество жидких тел, подвергнутых равномерному всестороннему сжатию, как описанная выше система, обладает самостоятельными геометрическими законами, и единственный фактор, от которого она зависит, это степень ее сжатия – величина, с которой мы вскоре встретимся.

Под понятием «жидкое тело» мы будем подразумевать некоторый постоянный объем жидкости, не обладающей смачиванием, в котором силы поверхностного натяжения играют существенную роль. В данной работе понятия «жидкое тело» и «капля» считаются эквивалентными.

В теории поверхностей – разделе классической геометрии – хорошо развит математический аппарат, который применим для описания и исследования поверхностей жидких тел. Но он не позволяет вывести уравнения таких поверхностей, не выходя за рамки этой теории. В данном случае на помощь приходит физика жидкости. Она и дает те недостающие уравнения, которые вместе с геометрическими уравнениями образуют систему, однозначно определяющую искомую поверхность. Поэтому геометрию жидких тел можно так же назвать *физической геометрией*. Именно обращение к состоянию вещества этих тел позволяет выделить из всех мыслимых вариантов поведения их поверхности именно те, которые допускает жидкость.

Предлагаемая система является моделью некоторой физической среды. Но, как и подобает понятию среды, главные ее свойства проявляются только при наличии и по отношению к объектам, которые в ней находятся и не входят в ее структуру. Однако в этой среде мы не будем вводить никаких инородных образований, а все они будут «плоть от плоти» самой среды. Как кусочки льда, плавающие в воде, хотя и являются твердыми телами, испытывающими и гидростатическое давление, и сопротивление своему движению, но, по сути, являются той же водой.

В части I данной работы мы познакомимся с системой, состоящей из капель одной жидкости – такую систему назовем *однокомпонентной*. Она откроет перед нами такие неожиданные и такие удивительные свойства, которые поставят под сомнение кажущуюся на первый взгляд искусственность концепции таких систем.

Наша теория систем сжатых капель, как и любая другая, имеет особые исходные условия, на которых она базируется – аксиомы, которые на данном этапе принимаются без объяснения причин их возникновения. Хотя все они уже упоминались, перечислим их:

1. Имеется множество одинаковых капель жидкости;
2. Жидкость эта не обладает смачиванием;
3. Жидкость идеальная – отсутствует внутреннее трение;
4. Все множество подвергнуто сферически-симметричному внешнему сжатию.

Будет еще одно – пятое условие, но это – потом.

Как видим, условия эти вполне представимы и не требуют каких-либо дополнительных скрытых свойств. Все остальные свойства системы не являются особыми и находятся в «области действия» современных знаний. Посмотрим, что же вытекает из этих условий.

Глава 1

Свойства капли жидкости

Капля жидкости является базовым объектом, свойства которой определяют поведение системы в целом, поэтому, прежде всего, познакомимся со свойствами этого объекта.

2. Геометрия поверхности капли. Контактные давления

Несмотря на то, что жидкость податлива, отчего общая форма капли определяется условиями ее окружения, на эту форму всегда накладывает свою особенность поверхностное натяжение. Представить себе жидкость без поверхностного натяжения нельзя. Попробуйте, хотя бы, ответить на вопрос – что будет представлять собой порция такой жидкости, не имеющей поверхностного натяжения, в невесомости?

Поверхностное натяжение создает гибкую, упругую оболочку, внутри которой находится текучее вещество. Вот эти условия и придают особенности формообразованию жидкого тела.

Объяснение причин возникновения поверхностного натяжения у реальных жидкостей можно найти в школьных учебниках физики. Смысл этих объяснений сводится к следующему: частицы жидкости, находящиеся на поверхности, испытывают одностороннее притяжение к таким же, находящимся внутри, и эти силы стараются вдавить поверхностную частицу внутрь. В результате все частицы, находящиеся на границе жидкости, прижаты друг к другу с некоторой силой, что и вызывает напряженное состояние поверхности.

Для нашего случая такое объяснение не подходит, поскольку идеальная жидкость считается бесструктурной, сплошной, не разделенной на отдельные частицы, поэтому вопрос причины ее поверхностного натяжения оставим без рассмотрения.

Если капля свободна, т.е. на нее не действуют никакие внешние силы, и она не вращается вокруг своей оси, то она принимает форму сферы – это единственная форма, при которой достигается равновесие сил поверхностного натяжения и внутреннего гидростатического давления, одинакового во всем объеме.

В нашей системе капли не являются свободными – они сжаты и действуют друг на друга с некоторой силой. Если говорить в общем, то на каплю может действовать два вида сил – *объемные* и *поверхностные*. Объемные силы, как следует из их названия, могут быть приложены в любой точке жидкости, как на поверхности, так и внутри. Таковыми являются силы тяжести и силы инерции. Первые мы никогда не будем рассматривать, а вторые будут учитываться в особых случаях.

Поверхностные силы, как уже понятно, это внешние силы, которые могут быть приложены только к поверхности – именно такие силы действуют между каплями системы. Часть поверхности капли, на которой действуют внешние силы, будем называть *поверхностью контакта*, а остальную часть – *свободной поверхностью*. Как правило, у капли бывает несколько отдельных поверхностей контакта и единая свободная поверхность. Рассмотрим геометрию этих поверхностей.

На рисунке 2.1 показан простейший пример деформированной капли, которая слегка сжата двумя параллельными плоскостями (плоскости, которые ее сжимают, не показаны). На свободной поверхности изображенной капли возьмем произвольную точку М и через нее проведем плоскость α , касательную к поверхности. На этой плоскости через точку М проведем две взаимно-перпендикулярные прямые m и t , направление одной из которых выбрано произвольно. Через одну из прямых, например, m проведем вторую плоскость (на рисунке не показана), перпендикулярную плоскости α , которая пересечет поверхность

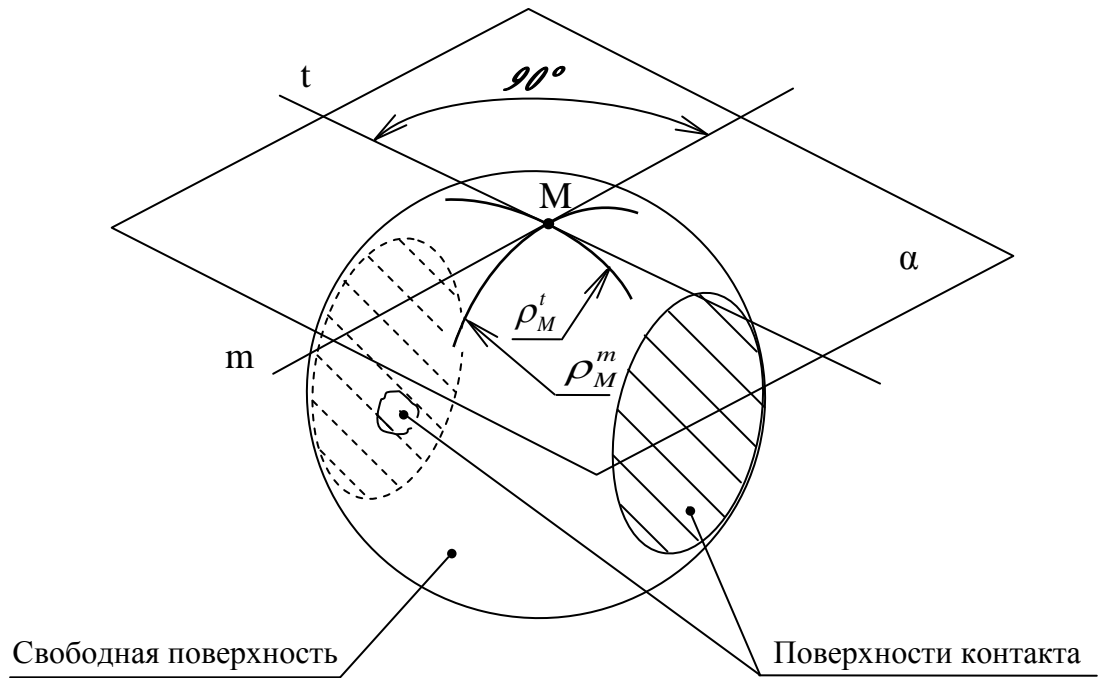


Рис.2.1. Простейший вид деформированной капли

капли по некоторой кривой. Эта кривая является нормальным сечением свободной поверхности в направлении m . Радиус кривизны полученной кривой в точке M обозначим ρ_M^m - это есть радиус кривизны поверхности в данной точке в выбранном направлении.

Точно так же проведем плоскость, перпендикулярную плоскости α , через прямую t , и получим второе нормальное сечение поверхности. Радиус кривизны второй кривой в точке M обозначим ρ_M^t - эта величина является радиусом кривизны поверхности в точке M в направлении t .

Запишем уравнение Лапласа* для свободной поверхности жидкости в выбранной точке:

$$\left(\frac{1}{\rho_M^m} + \frac{1}{\rho_M^t} \right) f = p, \quad (2.1)$$

где f – коэффициент поверхностного натяжения жидкости;

p – гидростатическое давление внутри капли.

Как видим, это уравнение однозначно связывает кривизну свободной поверхности с внутренним давлением жидкости. Разделив обе части уравнения (2.1) на f и, учитывая, что точка M была выбрана произвольно, запишем:

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{p}{f} = \text{const}, \quad (2.2)$$

где ρ' и ρ'' - радиусы кривизны в любой точке свободной поверхности в произвольно выбранных взаимно-перпендикулярных направлениях.

* Лаплас Пьер Симон (1749-1827) – французский математик, физик и астроном.

Левая часть выражения (2.2), обычно деленная на 2, называется *средней кривизной поверхности* в точке и обозначается H , т.е.:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} \right) \quad (2.3)$$

Таким образом, мы получили, что при любых деформациях капли, ее свободная поверхность является поверхностью постоянной средней кривизны (в геометрии такие поверхности образуют отдельный класс), у которой это значение средней кривизны определяется из (2.2) и (2.3) по формуле:

$$H_c = \frac{p}{2f}$$

(индекс «с» означает, что величина H относится к свободной поверхности жидкости). Следовательно, во всех точках этой поверхности величина H_c одинакова, но с изменением давления она, разумеется, меняется.

Теперь рассмотрим поверхность контакта - часть поверхности капли, которой она прижимается к другому телу. Когда в контакте находятся две капли, то их поверхности, которыми они соприкасаются, очевидно, имеют одинаковую форму, и в данном случае можно говорить об этих двух поверхностях как об одной. На рисунке 2.2 изображена зона касания двух капель, где поверхность контакта заштрихована пунктирными линиями. Капли обозначим 1 и 2, как показано на рисунке. Давления внутри каждой капли соответственно p_1 и p_2 , которые в общем случае, будем считать различными, например, $p_1 < p_2$.

На поверхности контакта выберем произвольную точку K и, как и раньше, - два взаимно-перпендикулярных направления q и r , одно из которых выбрано произвольно. Через эти прямые так же проведем секущие плоскости, нормальные к поверхности контакта в точке K (на рисунке не показаны). Сечение капель одной из этих плоскостей, например плоскостью, проведенной через прямую q , показано на рисунке 2.3. Здесь же обозначен радиус кривизны контактной поверхности в точке K в направлении q - ρ_K^q . Другое нормальное сечение – в направлении r имеет аналогичный вид, и радиус кривизны здесь ρ_K^r .

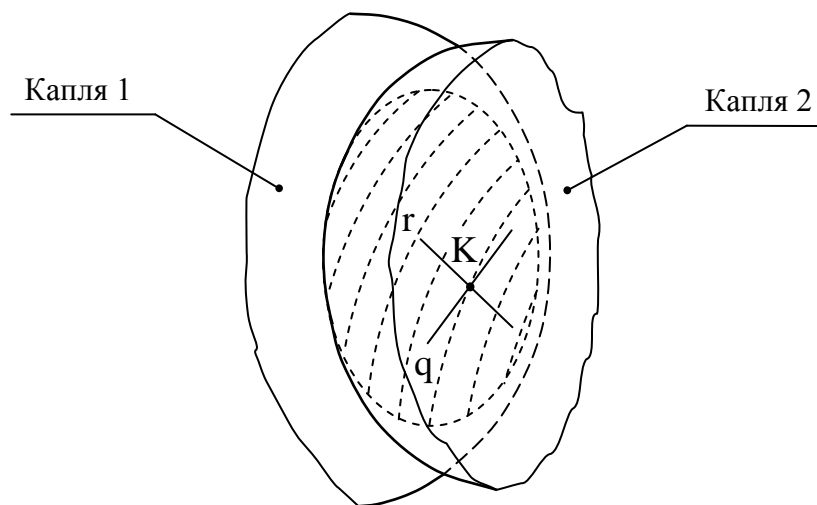


Рис.2.2. Зона контакта двух капель

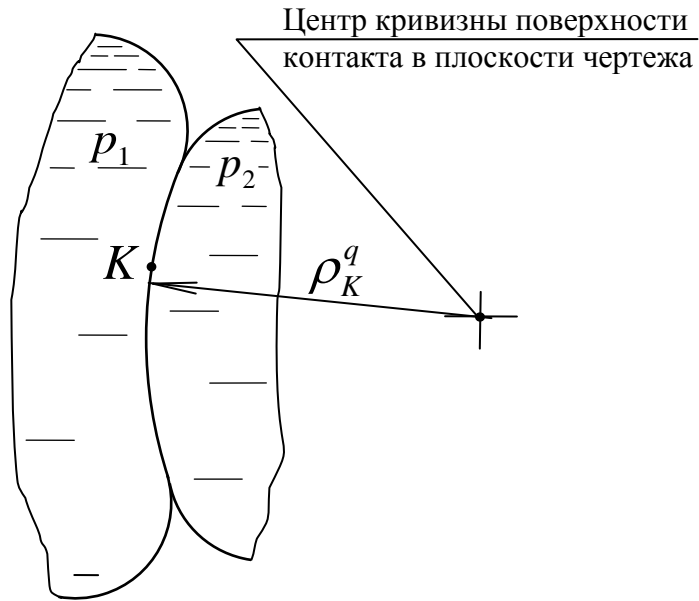


Рис.2.3. Сечение зоны контакта двух капель

Далее сделаем следующее. Как обычно принято в механике, когда находят контактные силы, мысленно разъединим капли так, чтобы в их состояниях ничего не изменилось. Для этого к поверхности контакта капли 1 приложим давление p_{21} , с которым капля 2 воздействует на каплю 1; точно так же к поверхности контакта капли 2 приложим давление p_{12} от капли 1 - оба этих случая показаны на рисунке 2.4. Очевидно $p_{21} = p_{12}$, и давления эти одинаковы во всех точках контактных поверхностей, поскольку давления жидкостей в каждой из капель в их объемах равномерны.

Теперь установим соглашения относительно знаков кривизны и давлений. Как видно на рис.2.3, у левой капли контактная поверхность вогнута, а у правой - выпукла. Условимся считать кривизну вогнутой поверхности отрицательной, а кривизну выпуклой - положительной. Следовательно, у капли 1 кривизна поверхности контакта отрицательна, а у капли 2 - положительна. Следует отметить, что такое соглашение применимо только к поверхностям, которые целиком располагаются по одну сторону от любой касательной плоскости - они имеют тип *котловины*. Другие поверхности - типа *седловины* - мы пока не рассматриваем.

Примем соглашение о знаках давлений. Будем считать давление, действующее изнутри капли на ее поверхность, положительным, а действующее снаружи (внешнее давление) - отрицательным. Таким образом, положительное давление стремится сообщить поверхности капли положительную кривизну, и наоборот.

Далее положим для общности, что коэффициенты поверхностного натяжения у капель различны и обозначим их, соответственно f_1 и f_2 . Запишем уравнения Лапласа для точки К поверхности контакта каждой из капель с учетом принятых соглашений:

$$\text{капля 1} \quad -\left(\frac{1}{\rho_K^q} + \frac{1}{\rho_K^r}\right) f_1 = p_1 - p_{21} \quad (2.4)$$

$$\text{капля 2} \quad \left(\frac{1}{\rho_K^q} + \frac{1}{\rho_K^r}\right) f_2 = p_2 - p_{21} \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.4) выразим p_{21} :

$$p_{21} = p_1 + \left(\frac{1}{\rho_K^q} + \frac{1}{\rho_K^r} \right) f_1 \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.5) выразим p_{12} :

$$p_{12} = p_2 - \left(\frac{1}{\rho_K^q} + \frac{1}{\rho_K^r} \right) f_2 \quad (2.7)$$

Приравняв правые части уравнений (2.6) и (2.7), после преобразования получим:

$$\left(\frac{1}{\rho_K^q} + \frac{1}{\rho_K^r} \right) = \frac{p_2 - p_1}{f_1 + f_2} \quad (2.8)$$

Поскольку точка К выбрана произвольно, то это уравнение будет справедливо для любой точки поверхности контакта каждой из капель:

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{p_2 - p_1}{f_1 + f_2} = \text{const}, \quad (2.8')$$

где ρ' и ρ'' - радиусы кривизны поверхности в произвольно выбранных взаимно-перпендикулярных направлениях.

Как видим, контактная поверхность капли, так же как и свободная, является поверхностью постоянной средней кривизны, только величина этой кривизны здесь другая (индекс «к» означает, что имеется в виду поверхность контакта):

$$H_k = \frac{p_2 - p_1}{2(f_1 + f_2)} \quad (2.9)$$

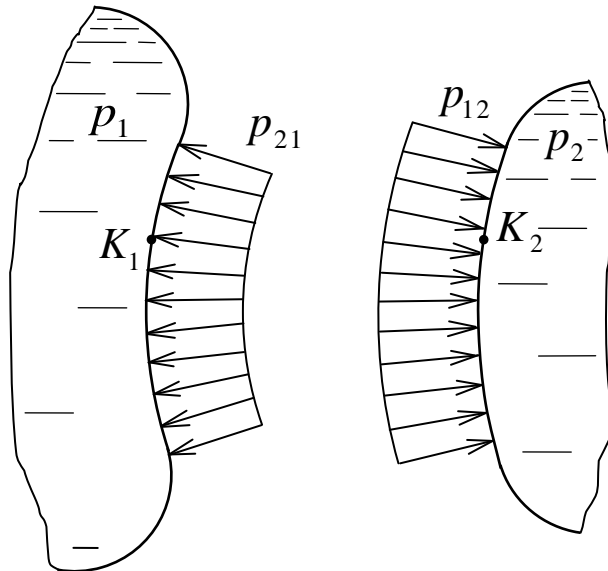


Рис.2.4. Давления, действующие на поверхности контакта двух капель

Последнее выражение показывает, что если давления в каплях одинаковые, то средняя кривизна поверхности контакта равна нулю и это значит, что данная поверхность плоская (это справедливо только для поверхностей типа котловины). И наоборот - если поверхность контакта плоская, то внутренние давления в каплях одинаковы.

Остается не выясненным вопрос, как же выражается контактное давление p_{12} и p_{21} через давления p_1 и p_2 в самих каплях. Выяснить это просто – в уравнение (2.7)

подставим вместо суммы $(\frac{1}{\rho_K^q} + \frac{1}{\rho_K^r})$ ее выражение из (2.8) и получим:

$$p_{12} = p_1 \frac{f_2}{f_1 + f_2} + p_2 \frac{f_1}{f_1 + f_2} \quad (2.10)$$

То же самое будем иметь и для p_{21} , когда в (2.6) подставим (2.8). Если жидкость капель одинаковая, т.е. $f_1 = f_2$, то выражение (2.10) упрощается:

$$p_{21} = p_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} \quad (2.11)$$

Следовательно, контактное давление между сжатыми каплями одинаковой жидкости равно среднему значению их внутренних давлений.

В дальнейшем будет неоднократно рассматриваться контакт капли с жесткой поверхностью, поэтому важно знать, каким будет при этом контактное давление. Первый и наиболее частый случай – жесткая поверхность плоская. Тогда в формуле (2.6) второе слагаемое обращается в нуль, и искомая величина контактного давления равна давлению в самой капле. Второй важный случай – жесткая поверхность имеет форму сферы радиусом R . Тогда из формул (2.6) и (2.7) следует:

$$p_k = p \pm \frac{2f}{R}, \quad (2.12)$$

где: p_k – контактное давление капли на жесткую поверхность;

p – давление в капле;

f – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

При этом знак «+» берется, если выпуклость жесткой поверхности направлена к капле.

Подводя итог предварительному рассмотрению геометрии поверхности жидкого тела, отметим некоторые ее особенности. Во-первых, свободная поверхность и поверхность контакта у капли всегда сопряжены. Это значит, что через любую точку, где одна поверхность переходит в другую, всегда можно провести плоскость, которая будет касательной к обеим поверхностям.

Далее. Как уже сказано, у деформированной капли, как правило, несколько поверхностей контакта, и если это поверхности контакта с другими каплями, то, вообще говоря, средняя кривизна у всех этих поверхностей может быть разной. Это следует из того, что давления в каплях, примыкающих к рассматриваемой, могут быть различными.

Интересно отметить, что самая большая площадь свободной поверхности – у свободной капли (такова вся ее поверхность). И в то же время, если говорить о суммарной площади (свободная + контактная), у свободной капли она самая маленькая. Как только капля касается других и деформируется вместе с ними, ее свободная поверхность уменьшается, а контактная – растет. При этом суммарная площадь также растет, но она всегда остается меньше некоторого предельного значения.

3. Деформация капли. Ячейка

Какими способами можно деформировать каплю жидкости? Самый простой – взять две плоские параллельные поверхности, поместить между ними каплю и сдавить. При этом капля сплющится, примет форму «блина» и, по мере сближения поверхностей, все больше будет раздаваться в стороны, беспредельно растекаясь по плоскостям в форме тонкого диска. Понятно, что пока уменьшается толщина диска, его диаметр будет расти неограниченно.

Можно деформировать каплю по-другому – поместить ее между четырьмя или более поверхностями, которые образуют замкнутый объем как, например, грани тетраэдра, куба или любого другого многогранника, и сближать эти поверхности, сдавливая жидкость со всех сторон. При этом капля будет оставаться в замкнутом пространстве, размеры которого ограничены.

Приведенные примеры демонстрируют два основных вида деформаций – первый, если какой-либо размер капли растет неограниченно, назовем *открытой*, а второй вид – *закрытой деформацией*. При закрытой деформации все размеры капли остаются ограниченными, как бы сильно ее ни сдавливали. В этой книге будут рассматриваться только закрытые деформации, поскольку в системе сжатых капель открытых не бывает.

Описывая закрытую деформацию, мы не указывали, что сжимающие поверхности должны быть непременно плоскими и жесткими, потому что, в общем, это не обязательно. Однако на протяжении этого и следующих двух разделов будут рассматриваться именно такие деформации капли, когда сжимающие поверхности являются и плоскими, и жесткими.

Чтобы сжать каплю в замкнутом пространстве, не обязательно одновременно сдвигать все ограничивающие ее поверхности навстречу друг другу. Достаточно сделать подвижной одну из них и к ней прикладывать сжимающую силу.

Рассмотрим частный случай деформации капли в замкнутой полости, имеющей форму прямого параллелепипеда. Для этого воспользуемся несложным устройством, которое назовем *контейнером*, представляющим собой жесткий ящик с плоскими стенками. Одну из стенок сделаем подвижной – в виде поршня, который может перемещаться, уменьшая или увеличивая внутренний объем контейнера. Такое устройство позволит нам проследить за изменением формы капли под действием внешних сил.

Предварительно заметим, что стенки контейнера и боковые поверхности поршня абсолютно гладкие, так что трение между ними, а так же между каплей и стенками отсутствует. И, чтобы совсем идеализировать условия сжатия, примем, что все это происходит без инерционных сил. Последние, если и возникают при изменении скорости поршня, то ими можно пренебречь, приняв ускорение поршня сколь угодно малым.

Итак, возьмем контейнер квадратного сечения, сторона которого равна диаметру недеформированной капли, поместим в него каплю, имеющую вначале форму сферы, и подведем к ней поршень, как показано на рис.3.1 (стенки сделаны прозрачными, чтобы наблюдать за содержимым). В этом положении капля только касается всех шести стенок, но никакой деформации еще нет. Теперь начнем постепенно сжимать ее, увеличивая до некоторого значения F приложенную к штоку силу (сам контейнер, разумеется, закреплен и на него действует удерживающая сила – реакция основания, которая всегда подразумевается, но нигде не упоминается). Под действием этой силы поршень переместится в положение, при котором противодействие сжатой капли достигнет той же величины F . Это положение показано на рисунке 3.2. Здесь, как видим, форма капли приблизилась к форме полости контейнера, а участки контакта со стенками стали занимать значительную часть ее поверхности.

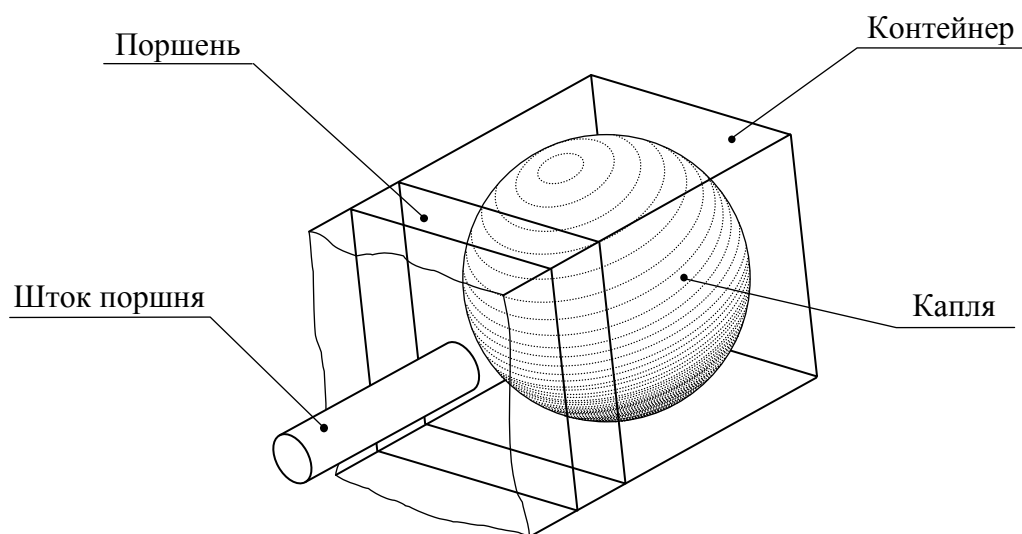


Рис. 3.1. Капля жидкости, помещенная в контейнер.

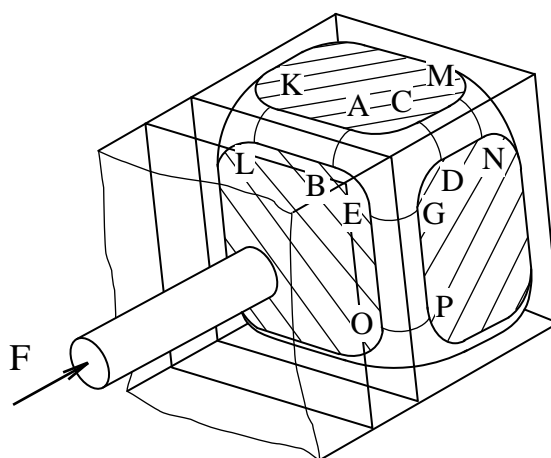


Рис. 3.2. Капля жидкости, сжатая в контейнере.

Рассмотрим поверхность капли в этом состоянии. Что касается участков контакта - на них мы пока останавливаться не будем – они плоские, как и стенки контейнера. Наиболее интересна здесь свободная поверхность. Разделим ее на части - как показано на рисунке 3.2, разрезав сечениями, параллельными стенкам. Буквами обозначены дуги, по которым эти сечения пересекают поверхность капли. Таким образом, мы разбили всю свободную поверхность на участки двух видов - один из них расположен между дугами KL и AB, CD и MN, EG и OP (то же самое – под остальными ребрами контейнера) – это цилиндрические поверхности, в основании которых – дуга окружности радиусом ρ_{\min} .

Другой вид участков - это угловые зоны, один из которых расположен между дугами АВ, EG и DC – сложная поверхность постоянной средней кривизны - далее мы ее подробно рассмотрим.

Что же это за радиус ρ_{\min} , который имеют проведенные на рисунке дуги? Если вспомнить уравнение (2.2), написанное для любой точки свободной поверхности, то оно выглядит так:

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{p}{f}$$

Здесь обозначены ρ' и ρ'' - радиусы кривизны сечения поверхности в двух взаимно-перпендикулярных направлениях в выбранной точке. Ранее мы не задавались вопросом - как зависит величина радиуса кривизны сечения некоторой поверхности от направления сечения в исследуемой точке. На уравнение это не влияло, лишь бы выполнялось условие взаимной перпендикулярности направлений, в которых эта поверхность пересекается. Однако в теории поверхностей утверждается, что если в какой-либо точке гладкой поверхности восстановить перпендикуляр, провести через него секущую плоскость, и поворачивать ее вокруг этого перпендикуляра, измеряя радиус кривизны сечения, то всегда будет одно направление, в котором этот радиус станет максимальным, а в другом направлении, перпендикулярном к первому, радиус кривизны обязательно будет минимальным. Это, так называемые, *главные направления* поверхности в выбранной точке (если эта точка не особая – см. ниже). Соответственно, эти радиусы кривизны тоже называются *главными* - ρ_{\max} и ρ_{\min} .

Имеет место равенство:

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho_{\min}} + \frac{1}{\rho_{\max}} \quad (3.1)$$

То есть, сумма значений кривизны поверхности в некоторой точке в любых двух взаимно-перпендикулярных направлениях всегда постоянна и равна сумме главных кривизн в этой точке (напомним, что кривизной называется величина, обратная радиусу кривизны). Поэтому раньше мы и не упоминали о главных направлениях – они нас не интересовали, поскольку нужно было лишь знать эту сумму. Но теперь, рассматривая точку свободной поверхности капли на цилиндрическом участке, удобнее пользоваться именно главными направлениями, так как одно из них уже известно – это направление образующей цилиндра. В этом направлении сечение поверхности – прямая линия, кривизна которой, как известно, равна нулю, а радиус кривизны $\rho_{\max} = \infty$. Соответственно, второе главное направление, перпендикулярное первому, дает в сечении дугу окружности радиусом ρ_{\min} . Подставляя эти радиусы в уравнение (2.2), получим:

$$\frac{1}{\rho_{\min}} + 0 = \frac{p}{f},$$

откуда

$$\rho_{\min} = \frac{f}{p} \quad (3.2)$$

(напомним, что f - коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а p - давление внутри капли).

В дальнейшем, для упрощения записи, величину радиуса свободной поверхности на цилиндрических участках будем обозначать просто r , т.е. $r = \rho_{\min}$. Как легко видеть из

(3.2), с увеличением давления радиус цилиндрических поверхностей уменьшается, и жидкость все больше заполняет двугранные углы контейнера.

Теперь обратим внимание на более сложную часть свободной поверхности, ограниченную дугами АВ, EG и DC (рис.3.2). Такие одинаковые участки обращены к каждому из восьми трехгранных углов контейнера – один из них показан на рис. 3.3. Первое, что бросается в глаза – это симметрия поверхности. Ее можно рассечь тремя плоскостями по линиям QR, ST и UV и она распадется на три совершенно одинаковые пары «кусков», где в каждой паре части тоже одинаковые, но зеркально отраженные. На пересечении означенных линий находится точка W – это особая точка поверхности. Поскольку она лежит на пересечении трех плоскостей симметрии, в ней не может существовать двух перпендикулярных между собой направлений с различной величиной кривизны. Здесь возможен только один вариант – во всех направлениях кривизна сечений одинакова. В теории поверхностей ее называют *омбилической точкой* (иногда встречаются названия – *точка округления*, *шаровая точка*) – в этой точке главные направления не определены, или, если хотите, здесь все направления – главные, как если бы она принадлежала сфере.

В связи с этим интересно отметить, что существует только две поверхности, состоящие полностью из омбилических точек – это сфера и плоскость (у плоскости кривизна во всех направлениях равна 0). Других таких поверхностей нет.

Чему же равен этот одинаковый радиус кривизны сечений в омбилической точке нашей поверхности? Обозначим его ρ_o и подставим в (2.2), учитывая, что здесь $\rho' = \rho'' = \rho_o$:

$$\frac{1}{\rho_o} + \frac{1}{\rho_o} = \frac{p}{f},$$

откуда, с учетом (3.2):

$$\rho_o = 2 \frac{f}{p} = 2\rho_{\min} \quad (3.3)$$

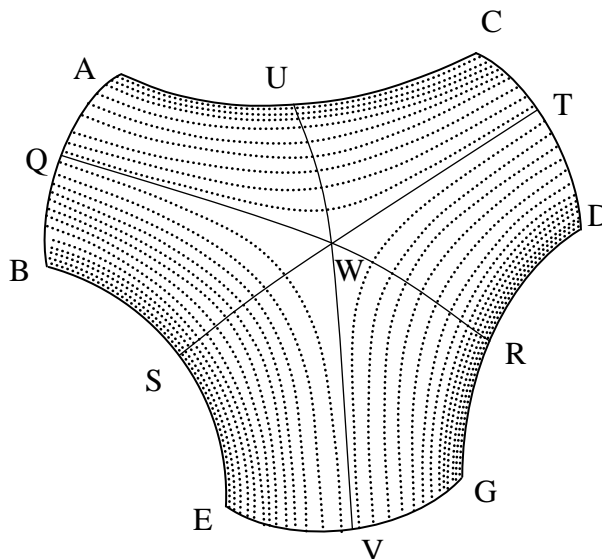


Рис.3.3. Участок свободной поверхности сжатой капли, обращенный к трехгранному углу контейнера.

Взгляните еще раз на рис.3.3. Ввиду указанной выше симметрии, кривые AC, BE и GD одинаковы (как говорят в геометрии - конгруэнтны). Кроме этого точки S, R, U делят каждую свою кривую на две симметричные части. Рассмотрим одну из этих кривых, например BE. Для этого повернем поверхность, изображенную на рис.3.3 так, чтобы плоскость кривой BE совпала с плоскостью рисунка. Такое положение показано на рис.3.4.

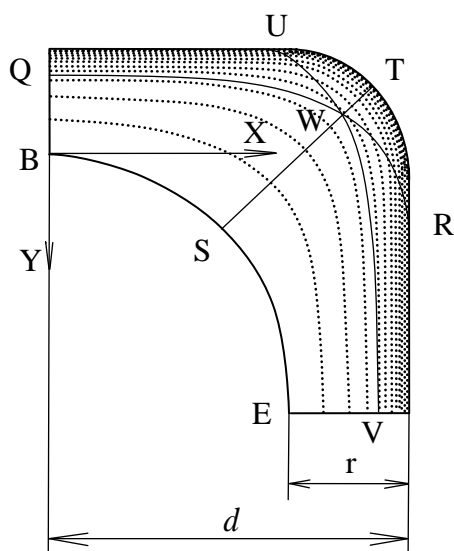


Рис.3.4. Вид сбоку поверхности, изображенной на рис.3.3.

Кривая ВЕ является криволинейным участком замкнутой линии, ограничивающей поверхность контакта капли со стенкой. Если провести оси координат X и Y из точки В, как показано на рис.3.4, то приближенное аналитическое выражение участка BS этой кривой будет иметь вид:

$$y = r \left(0.0321 \left(\frac{x}{r} \right)^3 - 0.0145 \left(\frac{x}{r} \right)^4 + 0.0049 \left(\frac{x}{r} \right)^5 + 0.0008 \left(\frac{x}{r} \right)^6 \right) \quad (3.4)$$

(напомним, что r – радиус сечения цилиндрических поверхностей капли).

Данная кривая обладает замечательным геометрическим свойством – площадь криволинейного треугольника ВОЕ (на рис.3.5 заштрихован) равна четверти площади круга радиуса r :

$$S_{BOE} = \frac{\pi}{4} r^2 \quad (3.5)$$

Свойство это не может быть установлено из приближенного выражения (3.4). Численное интегрирование этого выражения позволило лишь «заподозрить» данную кривую в этом свойстве, но доказательство его проводится другим способом. Рассечем контейнер с каплей, изображенный на рис. 3.2, посередине плоскостью, перпендикулярной продольной оси контейнера, и рассмотрим отдельно левую часть, как показано на рис. 3.6. Действие отброшенной части капли заменим силами поверхностного натяжения f , приложенными по длине L контура сечения, и силой давления p жидкости на площади S_K сечения. Запишем уравнение равновесия сил в проекции на ось О-О контейнера, принимая направление действия силы F положительным:

$$F + Lf - pS_K = 0 \quad (3.6)$$

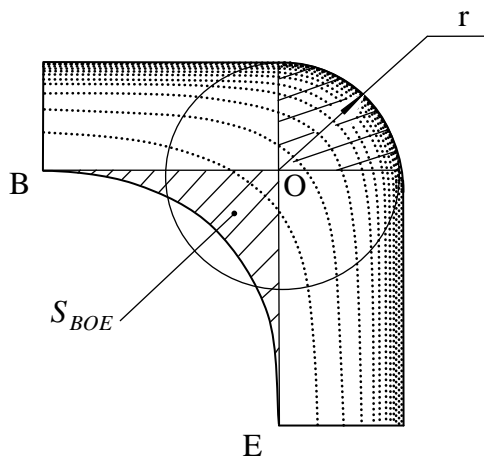


Рис.3.5. Иллюстрация геометрического свойства кривой BE

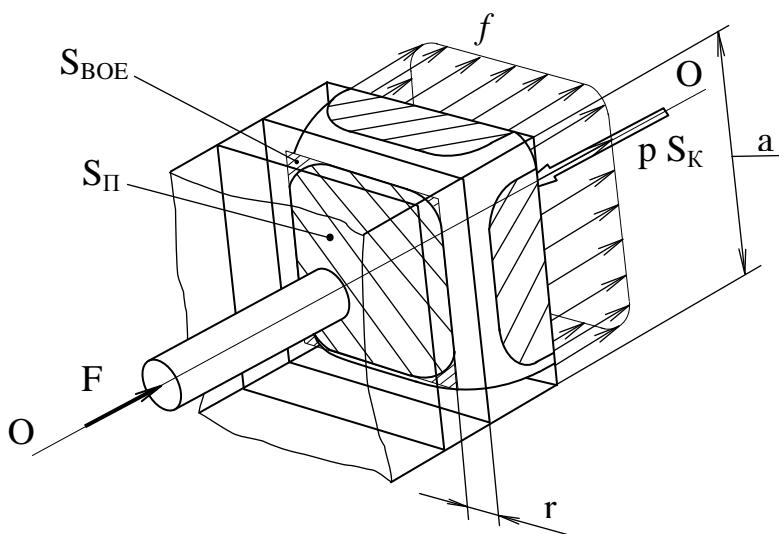


Рис. 3.6. К определению площади S_{BOE} .

Выразим величину силы F через давление в капле:

$$F = p S_{\Pi} , \quad (3.7)$$

где S_{Π} – площадь поверхности контакта капли с поршнем.

Подставим это выражение в предыдущее уравнение:

$$p S_{\Pi} + L f - p S_K = 0 \quad (3.8)$$

Далее разделим все на p :

$$S_{\Pi} + L \frac{f}{p} - S_K = 0 \quad (3.9)$$

Отношение f / p равно радиусу r цилиндрических участков (выражение (3.2)), и после этой подстановки уравнение (3.9) примет вид:

$$S_{\Pi} + L r - S_K = 0 \quad (3.10)$$

Теперь найдем длину L контура сечения капли, площадь S_K этого сечения, и площадь S_{Π} поверхности контакта капли с поршнем, учитывая, что контейнер имеет в сечении квадрат со стороной a :

$$L = 4(a - 2r) + 2\pi r = 4a - 8r + 2\pi r \quad (3.11)$$

$$S_K = a^2 - (4r^2 - \pi r^2) = a^2 - 4r^2 + \pi r^2 \quad (3.12)$$

$$S_{\Pi} = (a - 2r)^2 - 4S_{BOE} = a^2 - 4ar + 4r^2 - 4S_{BOE} \quad (3.13)$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.10), после преобразований получим:

$$\pi r^2 - 4S_{BOE} = 0, \quad (3.14)$$

откуда и следует (3.5).

Вернемся к поверхности, изображенной на рис. 3.3. Путем физико-геометрического расчета найдено приближенное аналитическое выражение одного из ее одинаковых участков. Полученное выражение очень громоздко, поэтому здесь не приводится, но оно позволило определить основные характеристики данной поверхности – размер d (рис.3.4), ее площадь S и объем V между этой поверхностью и стенками трехгранного угла:

$$d = 3.941 r \quad (3.15)$$

$$S = 16.325 r^2 \quad (3.16)$$

$$V = 3.594 r^3 \quad (3.17)$$

Приведенные выражения показывают, что форма этого участка не зависит от давления в капле. Изменяются только его размеры, но соотношение между ними остается постоянным, т.е. участки эти сохраняют подобие при разных давлениях.

Последний вывод можно проиллюстрировать таким примером. Представим себе некое оптическое устройство типа микроскопа, объектив которого направлен на эту поверхность. Тогда, посмотрев в окуляр, мы увидим картину, почти такую же, как на рис.3.3. Положим далее, что оптическое увеличения этого устройства всегда прямо пропорционально давлению в капле – растёт давление (уменьшается r) – растёт увеличение. В таких условиях наблюдатель никогда не узнает, изменяется ли давление в жидкости, или остается постоянным – изображение поверхности всегда будет одинаковым.

Описанное свойство свободной поверхности капли сохранять форму своих участков при увеличении давления начинает проявляться с момента, когда под всеми двугранными углами полости, в которой она сжата, образуются цилиндрические поверхности.

Это правило распространяется на все закрытые деформации, независимо от формы полости, в которой сжимается капля. В дальнейшем мы будем рассматривать именно такие случаи, когда капля деформирована настолько, что между каждой парой смежных поверхностей контакта имеется цилиндрический участок свободной поверхности.

Последнее, что касается свободной поверхности капли на участке трехгранного угла контейнера – форма и симметрия этой поверхности зависят от формы и симметрии самого трехгранного угла. В данном случае контейнер имеет вид прямого параллелепипеда, у которого рёбра сходятся под прямым углом друг к другу. Следовательно, у каждого его трехгранного угла плоские углы одинаковы. Такой угол имеет три плоскости симметрии, что мы наблюдаем и у нашей поверхности. Но стоит изменить наклон хотя бы одной грани, как изменится форма жидкости, сжатой в нем. При этом характеристики поверхности (3.15), (3.16) и (3.17) станут другими.

Теперь введем понятие *ячейки сжатой капли*, или просто *ячейки*. Если вернуться к контейнеру, то ячейка – это вся его внутренность, то есть сама капля вместе с прилегающими к ней пустотами. В данном случае ячейку ограничивают реальные поверхности стенок (рис.3.2). Но давайте видоизменим опыт – будем сжимать каплю не в закрытой полости, а между отдельными плоскими толкателями, как показано на рис.3.7.

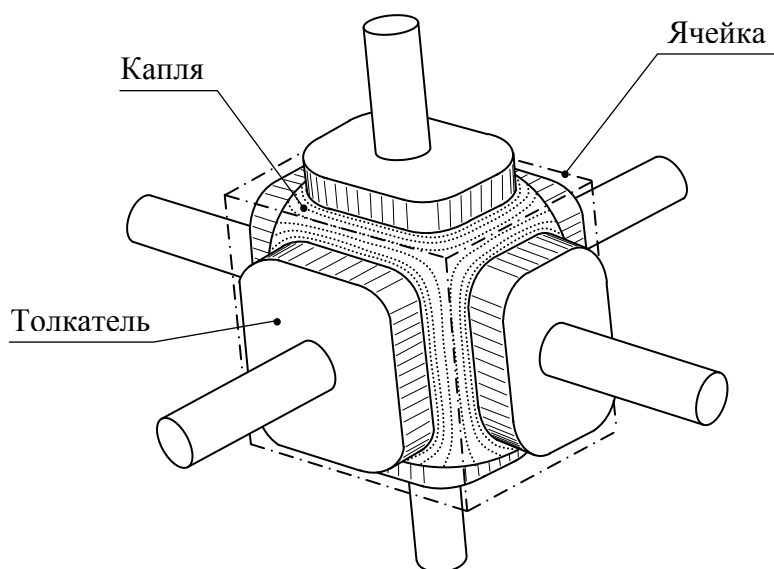


Рис. 3.7. Капля жидкости, сжатая толкателями.

В этом случае капля имеет ту же форму, что и в контейнере, только она находится не в замкнутом пространстве, и пустот, как таковых, здесь нет. Но если провести плоскости

через поверхности контакта жидкости с толкателями до их взаимного пересечения, то эти плоскости ограничат такой же параллелепипед, как и полость контейнера. Весь этот параллелепипед и является ячейкой данной сжатой капли. Теперь сформулируем определение: ячейка – это часть пространства, внутри которого находится сжатая капля, ограниченная плоскостями, проходящими через поверхности контакта.

Внешне ячейка представляет собой обыкновенный многогранник, в то время как сама капля – тот же многогранник, но со скругленными ребрами и вершинами. Несмотря на то, что часть ячейки составляет пустое пространство, мы будем обращаться с ней как с единым геометрическим телом, имеющим форму, поверхность, объем и т.д. Пока мы будем рассматривать ячейки только в виде выпуклых многогранников, т.е. таких, которые лежат по одну сторону от плоскости любой своей грани.

У читателя может возникнуть естественный вопрос – зачем к капле жидкости присоединять какие-то пустоты и рассматривать их совместно в виде ячейки? Приведем такой пример - сжатая капля имеет форму скругленного куба, а после дополнительной деформации она стала скругленным прямым параллелепипедом, у которого все размеры оказались разными. Спрашивается, как изменилось давление в капле, если объем полного (не скругленного) куба равен объему полного параллелепипеда?

Если есть возможность непосредственно измерить радиусы свободной поверхности жидкости на цилиндрических участках до и после деформации, то здесь понятия ячейки не потребуются, а ответ очевиден – там, где этот радиус больше, давление меньше, и наоборот. Но такой способ, как и сам опыт, во-первых, труднореализуем, а во-вторых – не позволяет вывести общий закон.

Подход, основанный на понятии ячейки, позволяет решить эту задачу так: по условию объем ячейки при деформации не изменился, следовательно, не изменился и объем пустот, т.к. объем самой капли постоянный. Но у параллелепипеда, каким стала ячейка после деформации, суммарная длина ребер больше, чем у куба того же объема (это геометрический факт – см., например, [2]). Поэтому, когда капля деформировалась в параллелепипед, суммарная длина пустот ячейки увеличилась, а чтобы объем этих пустот не изменился, должна уменьшиться площадь сечения этих пустот, но это возможно только при уменьшении радиуса свободной поверхности, то есть при увеличении давления. Следовательно, при изменении формы ячейки давление в капле выросло.

Приведенное решение задачи позволяет сделать некоторое обобщение - если капля деформируется так, что ее ячейка, хотя и меняется по форме, но все же остается прямым параллелепипедом постоянного объема, то давление в ней тем больше, чем больше суммарная длина ребер. Разумеется, это обобщение справедливо только для прямых параллелепипедов, и оказывается бесполезным для других форм. Нам же необходимо иметь решение для ячеек в виде любых многогранников.

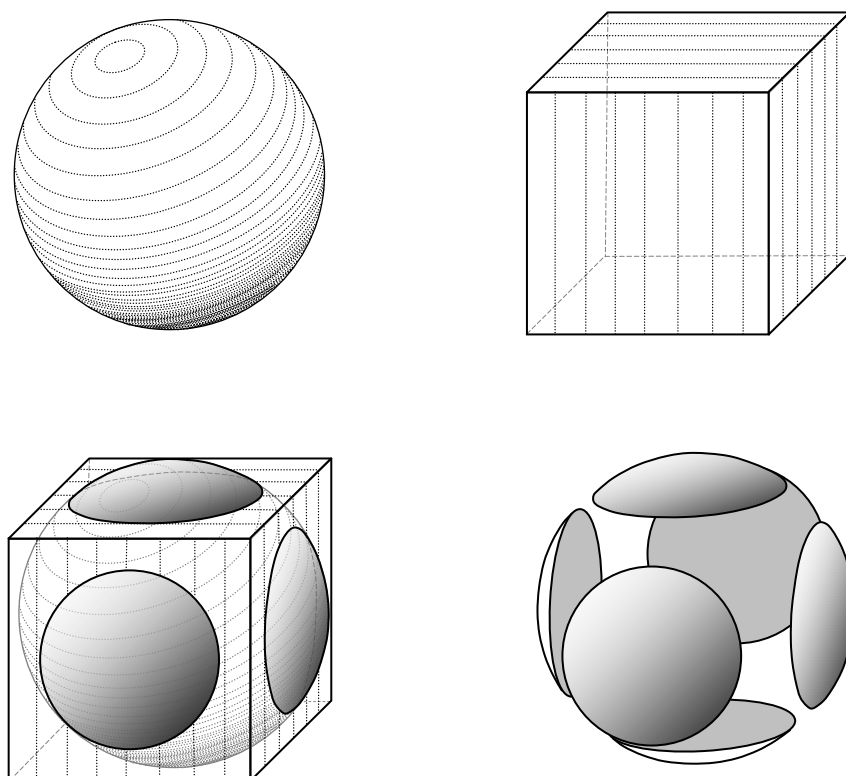
Тема ячеек будет продолжена в следующем разделе, а сейчас затронем другой вопрос. В нашей повседневной практике мы легко отмечаем различие форм тел. Но если нас спросить, насколько форма одного тела отличается от другого, то кроме «очень» или «не очень» мы ничего не сможем сказать. Те способы, которыми мы обычно пользуемся, не применимы к измерению различия форм, но это различие нужно как-то измерять.

Что может служить мерой изменения формы? Представим себе тело не сплошным, а в виде эластичной оболочки, заполненной жидкостью, внутреннее пространство которой разделено перегородками на множество мелких замкнутых объемов (лучше всего, если у этой жидкости не будет поверхностного натяжения, тогда она не будет образовывать пустот в углах этих объемов). Когда мы попытаемся изменить внешнюю форму этой оболочки, то обнаружим, что сделать это невозможно – внутри жидкость не может перемещаться свободно из-за перегородок, и форма держится такой, какая заложена в исходном распределении вещества между замкнутыми объемами. В данном случае оказывается безразличным – жидкость ли заполняет эти мелкие внутренние пространства, или это сплошное жесткое тело. Но стоит нам проделать отверстия в

перегородках, чтобы жидкость могла беспрепятственно перетекать сквозь них, и оболочка в целом станет податливой, допускающей деформацию. Значит, изменение формы сопровождается перемещением вещества внутри нее. И, по всей видимости, чем сильнее форма изменяется, тем больше вещества должно переместиться. Следовательно, при изменении формы внутри нее перемещается некоторый объем, который мы будем называть *перемещенным объемом*.

Чтобы представить величину этого перемещенного объема, обратимся к простому примеру. Допустим, у нас есть кусок пластилина, которому нужно придать другую форму. Сделать это можно двумя способами: первый, самый естественный – деформировать весь кусок в нужном направлении, постепенно получая из него требуемую конфигурацию. Но так мы не узнаем, сколько пластилина при этом переместилось. Более наглядный в этом смысле второй способ – от исходной формы отсекаем все то, что не войдет в ее конечный вид, затем из отсеченных кусков вылепливаем новые детали, которых не хватает в оставшейся части для новой формы, и присоединяем их в нужных местах. Таким образом, весь наш кусок пластилина мы сначала разделили на две части – одну, не изменяемую, которая, можно сказать, осталась на месте, и другую – которую мы изменили и переместили в другое место. Соединив их, мы и получили конечную форму, где вторая часть пластилина как раз и составляет перемещенный объем.

Этот пример, по сути, является алгоритмом нахождения перемещенного объема. Алгоритм этот состоит в следующем – совмещаются две сравниваемые равновеликие формы так, чтобы область их пересечения была наибольшей. Тогда искомый перемещенный объем – это объем частей одной из форм, которые не вошли в область пересечения. Естественно, такой же объем имеют и части второй формы, так же не вошедшие в область пересечения. На рисунке 3.8 показано определение перемещенного объема при сравнении шара и куба.



Перемещенный объем

Рис.3.8. Определение перемещенного объема при сравнении форм.

Идея перемещенного объема, вообще говоря, не нова. В геометрии существует такое понятие как *расстояние между формами по объему*. Определяется оно почти так же, как только что описали – две формы, не обязательно равновеликие, совмещаются с максимальным пересечением и измеряются объемы их частей, не вошедшие в это пересечение. Сумма всех этих выступающих объемов и есть искомая величина. В нашем случае мы ограничиваемся сравнением только равновеликих форм, и берем не все расстояние между этими формами по объему, а половину его, что соответствует нашему понятию перемещенного объема.

Таким образом, величина перемещенного объема может служить мерой деформации тела, а отсюда – мерой изменения некоторой формы, независимо от того, заполнена она веществом, или нет. Последнее замечание важно потому, что в будущем нас больше будет интересовать не деформация самой капли, а деформация ее ячейки, в которой, как мы знаем, есть пустоты.

4. Зависимость давления в капле от ее формы. Индекс ячейки

Представим, что в контейнере, где сжата капля, поршень повернулся на некоторый угол $\Delta\alpha$ вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной оси штока – как показано рис.4.1 (способ технической реализации такого поршня оставим в стороне).

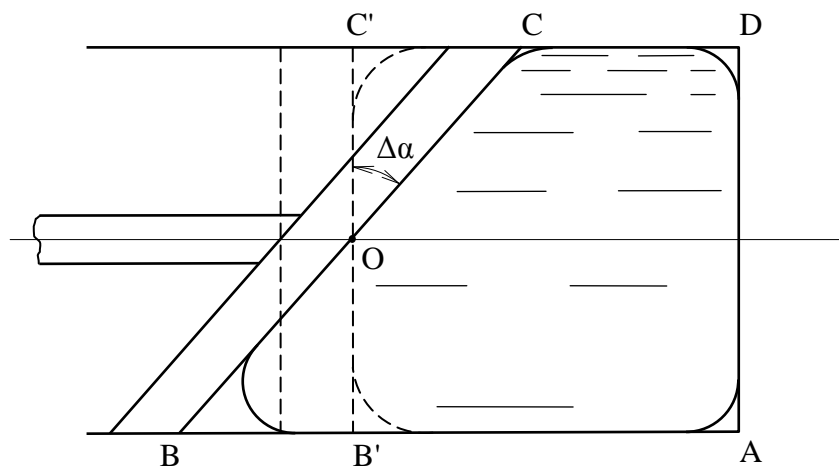


Рис. 4.1. Сечение контейнера после поворота поршня.

Поскольку ось поворота проходит через точку O, лежащую на оси контейнера, то объем полости при этом не изменился - треугольники BOB' и COC' равны, поэтому площади четырехугольников ABCD и AB'C'D одинаковы. Если умножить эти площади на ширину контейнера, то получим одинаковые произведения, которые и являются объемами полости до и после поворота поршня. Это очевидно. Но не так очевиден ответ на вопрос - изменилось ли при этом повороте давление жидкости?

Рассуждения, приведенные при решении подобной задачи в прошлом разделе, в данном случае не помогут - там все двугранные углы в ячейке оставались прямыми. Здесь же у прямого параллелепипеда наклонилась одна из граней, следовательно, некоторые его двугранные углы изменились. Но какое значение имеет изменение двугранных углов в ячейке? Чтобы это выяснить, давайте посмотрим, как заполняются жидкостью углы между поверхностями, сжимающими каплю. На рис.4.2 показаны сечения трех различных углов и положение жидкости в них. Обратите внимание – как сильно зависит площадь сечения пустого пространства (криволинейный треугольник BFE) от величины двугранного угла, когда радиус r свободной поверхности жидкости один и тот же - уменьшение двугранного угла вызывает непропорционально быстрый рост площади сечения пустоты.

Используем это свойство для ответа на поставленный вопрос об изменении давления жидкости при повороте поршня. Как уже показано, объем ячейки при этом не изменился. Это значит, что и объем пустот остался прежним. Когда один из двугранных углов в контейнере из прямого стал тупым, увеличившись на угол $\Delta\alpha$, жидкость сильнее заполнила его, и площадь сечения пустот здесь уменьшилась на некоторую величину $\Delta S_1 = S_{\text{прям}} - S_{\text{туп}}$. В то же время другой двугранный угол уменьшился на ту же величину $\Delta\alpha$ и из прямого стал острым, часть жидкости из него вытиснилась, а площадь сечения пустот увеличилась на $\Delta S_2 = S_{\text{остр}} - S_{\text{прям}}$. Из построений на рис.4.3 видно, что $\Delta S_1 < \Delta S_2$.

Длина ребер ячейки, на которых образовались тупой и острый двугранные углы, - это ширина контейнера, обозначим ее b (на рис.4.1 ширина контейнера перпендикулярна

плоскости чертеже), следовательно, длина этих ребер одинакова. Если предположить, что радиус r поверхности жидкости при повороте поршня не изменился, то вошедший в тупой угол дополнительный объем $\Delta V_1 \approx b \Delta S_1$ должен быть меньше объема $\Delta V_2 \approx b \Delta S_2$, вытесненного из острого угла, то есть $\Delta V_1 < \Delta V_2$. Кроме этого, при повороте поршня увеличилась суммарная длина ребер, на которых угол остался прямым, за счет удлинения наклонных сторон ВС. Все это вместе должно привести к увеличению объема пустот, что противоречит условию.

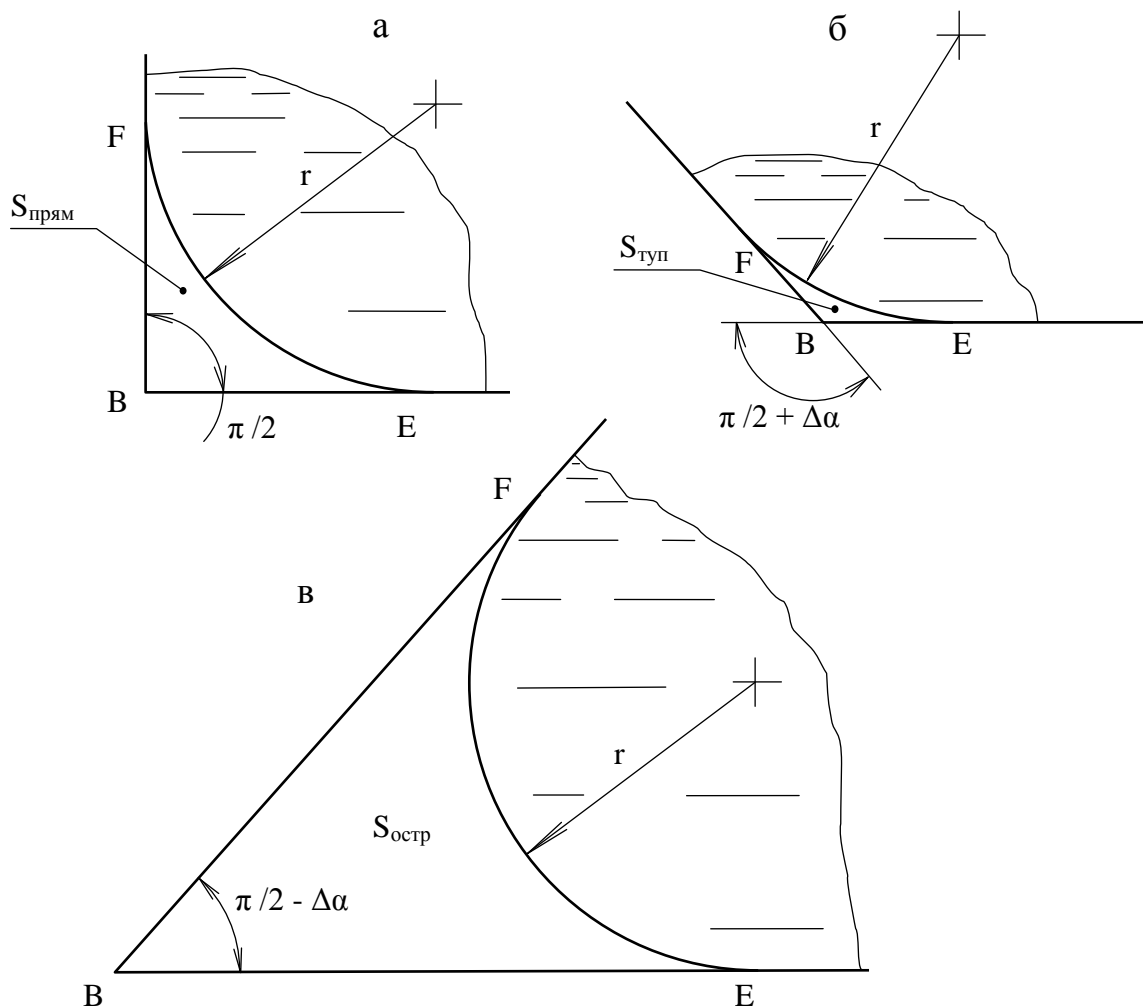


Рис. 4.2. Сечения различных двугранных углов с жидкостью.

Следовательно, предположение о том, что радиус r остался неизменным, неверно. Возможен только один вариант – при повороте поршня радиус r свободной поверхности уменьшился. Только в этом случае сохранится баланс объемов жидкости, вытесненной из острого угла и дополнительно вошедшей в тупой и в прямые двугранные углы. Отсюда следует однозначный ответ на поставленный ранее вопрос – при наклоне поршня давление жидкости увеличилось. Но на сколько, мы не знаем.

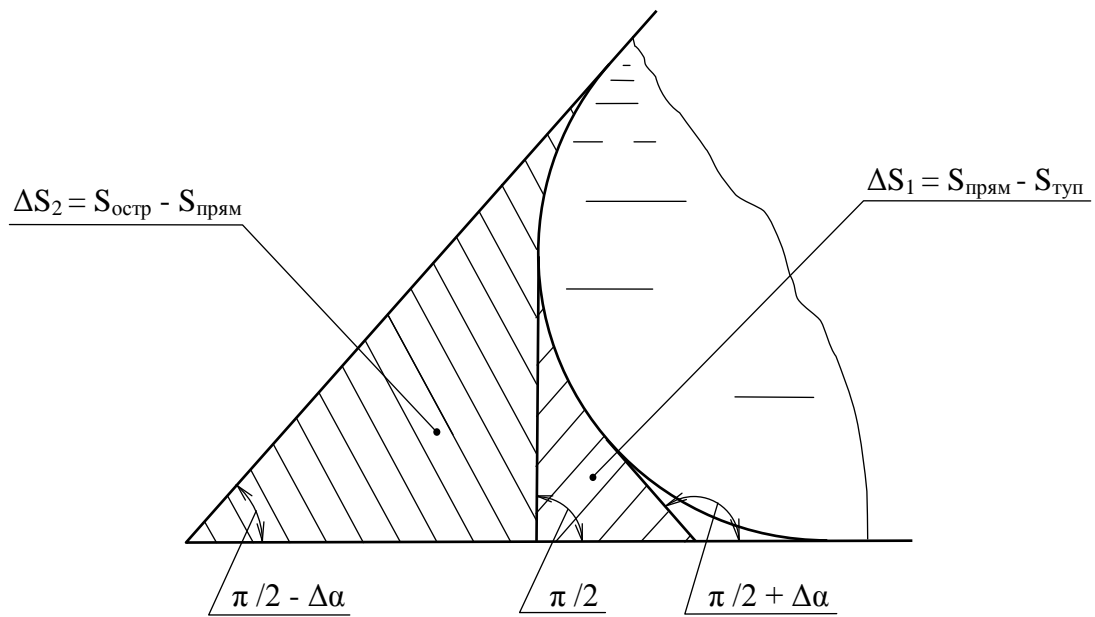


Рис. 4.3. Изменение площади сечения пустот при изменении двугранного угла.

Чтобы уметь рассчитывать изменение давления жидкости при деформации капли, нужно выразить объем пустот V_h ее ячейки. В общем случае примем, что ячейка представляет собой произвольный выпуклый многогранник объемом P , у которого n ребер и m вершин, заполненный жидкостью объемом V . Тогда все пустоты можно разбить на участки, где свободная поверхность жидкости имеет цилиндрическую форму – на ребрах, и угловые зоны – в вершинах (на рис.3.2 дано такое разбиение в параллелепипеде), а объем пустот выразится так:

$$V_h = P - V = \sum_{i=1}^n (L_{Ci} * S_{Ci}) + \sum_{j=1}^m M_j, \quad (4.1)$$

где L_{Ci} - длина цилиндрического участка свободной поверхности жидкости на i -ом ребре;

S_{Ci} - площадь сечения пустот над цилиндрической поверхностью на i -ом ребре;

M_j – объем пустот над поверхностью жидкости в j -ой вершине ячейки.

Но в таком виде выражение (4.1) практически неприменимо, и главным образом из-за наличия второй суммы – по объемам пустот в вершинах. Дело в том, что объем этих пустот зависит как от количества ребер, сходящихся в вершине, так и от величины двугранных углов на каждом ребре. Точное определение этих объемов возможно при известных значениях указанных параметров только в результате решения сложной физико-геометрической задачи жидкого тела. Поэтому, чтобы сохранить общность искомого выражения и сделать его удобным для дальнейшего применения, избавимся от второй суммы в (4.1) и учтем ее другим путем, хотя и с незначительной потерей точности. Для этого поступим следующим образом. Очевидно, что каждое ребро многогранника соединяет две вершины, то есть конец любого ребра всегда лежит на какой-то из вершин. Тогда объем пустот в каждой вершине просто разделим между входящими в нее ребрами, и эту долю присоединим к ребру, удливнив его участок пустот над цилиндрической

поверхностью на некоторую величину. В результате в выражении (4.1) останется только первая сумма, в которой длина каждого цилиндрического участка увеличится на некоторую добавку ΔL_i :

$$V_h = \sum_{i=1}^n (L_{Ci} + \Delta L_i) S_{Ci} \quad (4.2)$$

Однако это выражение все равно неудобно - величина L_{Ci} зависит как от длины i -го ребра ячейки, так и от размера углового участка свободной поверхности (как, например, размер d на рис.3.4) – опять нежелательная зависимость от угловых участков.

На основании расчетов формы поверхности жидкости, заполняющей некоторые многогранные углы, замечено следующее – в формуле (4.2) вместо суммы $(L_{Ci} + \Delta L_i)$ можно взять $(L_i + \Delta L')$, где L_i – длина всего i -го ребра ячейки, а $\Delta L'$ – некоторая добавка, которую допустимо принять одинаковой для всех ребер, независимо от величины двугранных углов на них. При этом найдено, что лучшее совпадение с расчетами дает значение этой добавки, равное $\Delta L' = 3r$, где, как и раньше r – радиус свободной поверхности жидкости на цилиндрическом участке.

Далее выразим площадь сечения пустот S_{Ci} , входящую в формулу (4.2). Для этого на рис.4.4 изображено сечение двугранного угла, имеющего величину α , и сжатой в нем жидкости с радиусом r . Из рисунка находим искомую площадь:

$$S_C = 2(S_{BFH} - S_{HLF}) \quad (4.3)$$

В этой формуле площадь прямоугольного треугольника BFH:

$$S_{BFH} = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (4.4)$$

Площадь кругового сектора HLF:

$$S_{HLF} = \pi r^2 \frac{\pi/2 - \alpha/2}{2\pi} = \frac{1}{4} r^2 (\pi - \alpha) \quad (4.5)$$

Подставим эти выражения в (4.3) и получим:

$$S_C = \frac{1}{2} r^2 (2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \alpha - \pi) \quad (4.6)$$

С этим значением площади, и с учетом принятой выше величины $\Delta L'$, выражение (4.2) объема пустот будет выглядеть так:

$$V_h = \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=1}^n (L_i + 3r) (2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} + \alpha_i - \pi) \quad (4.7)$$

В этой формуле под знаком суммы стоят переменные L_i и α_i , которые, являются параметрами многогранника-ячейки, а радиус r в первой скобке - это параметр жидкости, зависящий от формы ячейки. Такое сочетание переменных, которые находятся в сложной зависимости между собой, здесь совсем нежелательно. Забегая несколько вперед, отметим, что нас будут интересовать такие деформации капли, при которых радиус r ее свободной поверхности не превышает малой доли от длины ребра ячейки. Поэтому изменение этого радиуса при изменении давления жидкости, зависящего от формы

ячейки, будет мало влиять на величину суммы в (4.7), и этот переменный радиус можно заменить на некий начальный r_0 , который не зависит от текущего значения r . В дальнейшем будет показано, что радиус r_0 является константой состояния системы сжатых капель и может быть выражен через ее параметры.

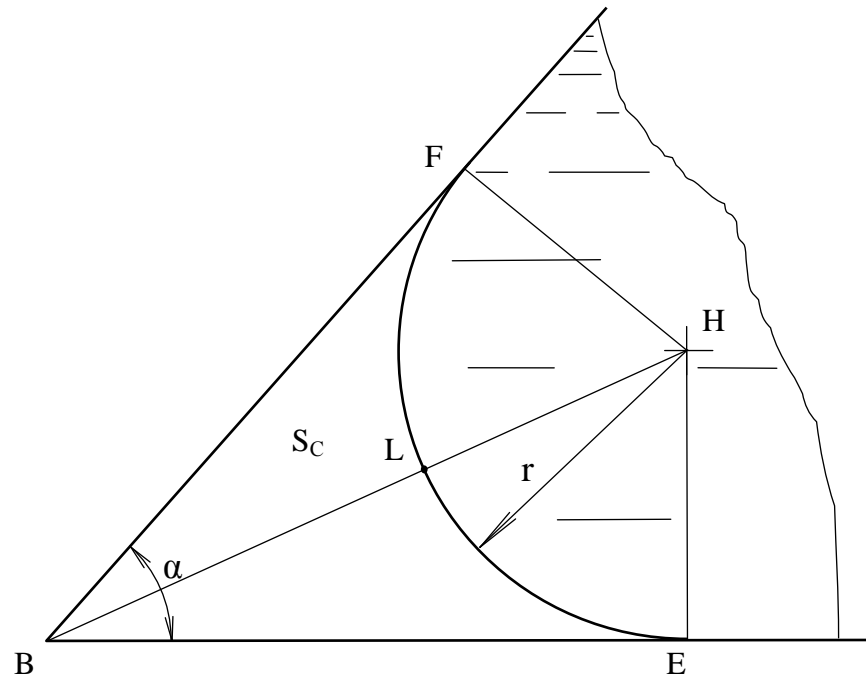


Рис. 4.4. К расчету площади сечения пустот на ребре ячейки.

После замены r на r_0 сумма в выражении (4.7) становится характеристикой конфигурации и размеров ячейки - назовем ее *индексом ячейки* и обозначим Ih :

$$Ih = \sum_{i=1}^n (L_i + 3r_0) \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} + \alpha_i - \pi \right) \quad (4.8)$$

(напомним, что n – число ребер многогранника – ячейки, L_i – длина i -го ребра, α_i – величина двугранного угла на i -ом ребре).

Как легко видеть, величина эта имеет размерность длины. После ввода новой характеристики ячейки выражение (4.7) объема пустот значительно упростится:

$$V_h = \frac{1}{2} Ih r^2 \quad (4.9)$$

Если здесь выразить радиус r через давление жидкости по формуле (3.2), то получится связь объема пустот в ячейке и давления в капле:

$$V_h = \frac{1}{2} Ih \frac{f^2}{p^2}, \quad (4.10)$$

где: f – коэффициент поверхностного натяжения жидкости;

p – давление жидкости в капле.

Из последней формулы выразим давление через объем пустот в ячейке:

$$p = f \sqrt{\frac{Ih}{2 V_h}} = f \sqrt{\frac{Ih}{2(P-V)}} , \quad (4.11)$$

где: P – объем ячейки;

V – объем капли.

При дальнейшем анализе в этом разделе будет удобнее пользоваться понятием *индекса многогранника* Ih_0 . Он определяется тем же выражением (4.8), в котором величина g_0 принимается пренебрежимо малой. Это позволяет рассматривать индекс ячейки как исключительно геометрическую характеристику многогранника, не привязанную к системе сжатых капель, то есть:

$$Ih_0 = \sum_{i=1}^n L_i \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} + \alpha_i - \pi \right) \quad (4.12)$$

Индекс многогранника – это характеристика его формы и размеров. При постоянной форме его индекс зависит линейно от размеров, но как влияет на величину данной характеристики форма при постоянном объеме?

Посмотрим еще раз на выражение (4.12). В нем каждое слагаемое зависит как от длины ребра, так и от величины его двугранного угла, но эта зависимость разная. Если длина ребра входит в слагаемое линейно, то влияние угла сложнее – это видно из графика на рис. 4.5. Изменение некоторого угла α_0 на одинаковую величину $\Delta\alpha$ в сторону увеличения и в сторону уменьшения вызывает различные по величине изменения Δy_+ и Δy_- ординаты кривой - увеличение угла дает меньшее изменение ординаты, чем его уменьшение. Такое свойство сомножителя в каждом слагаемом оказывает решающее влияние на всю сумму при изменении формы многогранника.

Рассмотрим многогранник постоянного объема, который можно произвольно изменять, оставляя плоскими грани - например, поворачивать и сдвигать любую грань, менять их количество и расположение, т.е. придавать ему любую возможную выпуклую форму. Придав такому многограннику некоторую исходную форму, немного повернем одну из его граней (чтобы объем не изменился, возможно, грань придется еще и сдвинуть). Мы увидим, что при повороте двугранные углы, примыкающие к этой грани, изменились – одни увеличились, другие уменьшились. Изменили свою длину и ребра, которые окаймляют данную грань, и которые подходят к ней. Следовательно, в таком изменяемом многограннике длина ребер и двугранные углы взаимозависимы.

Проанализируем, как этот поворот повлиял на величину выражения (4.12). Ребра, у которых изменилась только длина, заметно не повлияли на всю сумму – если одни ребра укоротились, то другие удлинились. Большие изменения внесли слагаемые, где изменился угол. Но здесь важно знать, как именно повернулась грань. Рассмотрим два случая: первый – до поворота все двугранные углы при этой грани были одинаковыми или близкими по значению, а поворот увеличил их различие - многогранник стал более неправильным. Второй случай противоположен первому – от поворота различие в двугранных углах уменьшилось, и многогранник стал ближе к правильному.

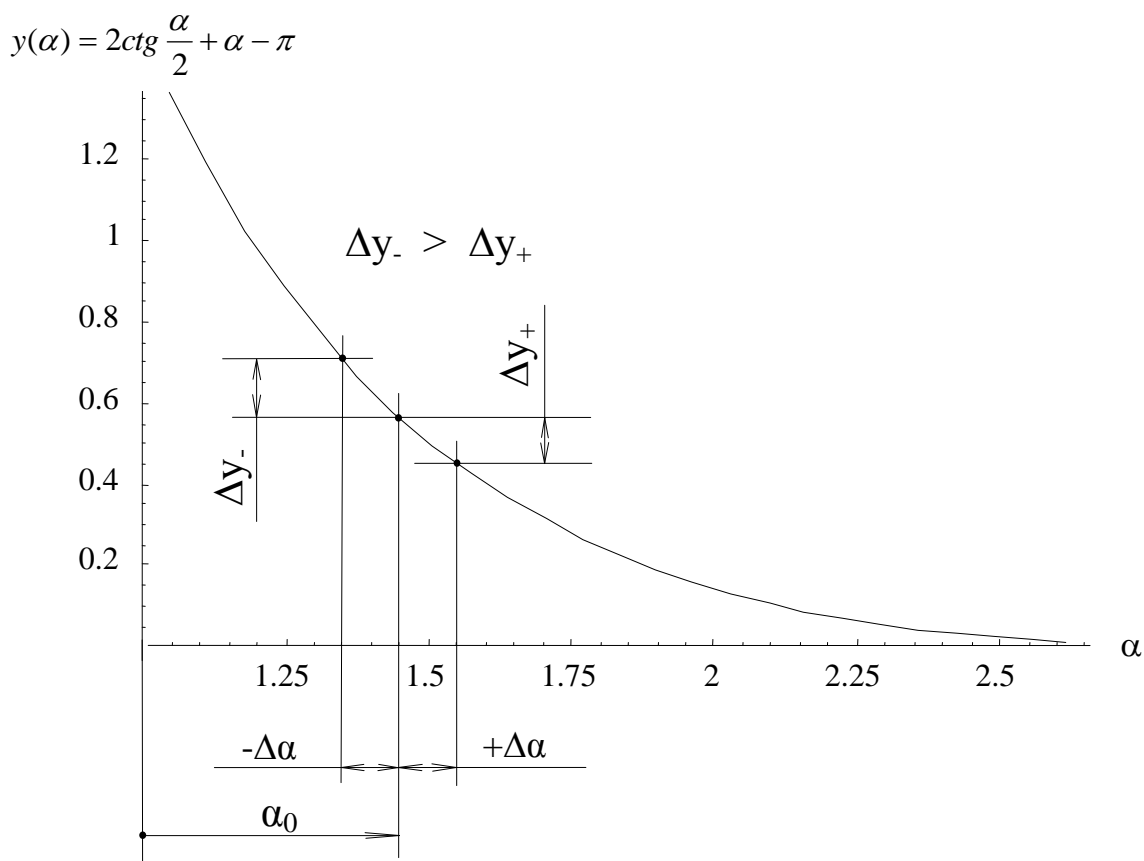


Рис.4.5. График зависимости величины сомножителя в формуле (4.12) от двугранного угла.

Примем, что наш поворот грани увеличил различие в двугранных углах, и многогранник стал более неправильным. Тогда слагаемое в (4.12), относящееся к ребру, где угол уменьшился, станет больше, даже если его длина уменьшилась – сомножитель $2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} + \alpha_i - \pi$ изменяется быстрее при повороте, чем длина ребра. Другое слагаемое, в котором угол увеличился, станет меньше в любом случае. Но главное здесь заключается в том, что одно слагаемое увеличится на большую величину, чем уменьшится другое, и в целом индекс многогранника вырастет. Таким образом, в многограннике постоянного объема все изменения в сторону его большей неправильности увеличивают его индекс.

Далее нам понадобится понятие *тип многогранника*. Вспомним, что это такое. В геометрии все многогранные тела делятся на типы (или схемы строения). Представим, что в некотором многограннике убрали все грани и оставили только ребра, сходящиеся в вершинах – как проволочный каркас, на который можно натянуть пленку и получить исходную форму (такое множество ребер мы будем называть *каркасом многогранника*). Тогда два многогранника принадлежат одному и тому же типу, если у них одинаково строение этих каркасов, то есть если один из них отличается от другого лишь длиной своих ребер и величиной углов между ними. Другими словами, тип многогранника определяется тем, сколько у него вершин и какая вершина с какой соединены ребром. Это значит, что у многогранников одного типа будет одинаковым и число вершин, и число ребер, и число граней, как, например, у куба и параллелепипеда. Однако, среди тел, у которых только одинаковое число граней, может быть несколько разных типов. Так,

например, среди выпуклых многогранников с 6-ю гранями количество типов равно 7, а у восьмигранников насчитывается 257 типов, и т.д.

Теперь поставим такую задачу - взяв многогранник, форму которого можно изменять, не меняя его типа и объема, найти такую его конфигурацию, у которой индекс будет минимальным. При таких условиях с исходной формой можно выполнять только два действия – поворачивать любую грань относительно других и перемещать грани параллельно себе, не образуя при этом новых ребер и вершин (такое нежелательное преобразование может произойти, если, например, в вершине сходятся четыре грани, а одну из них передвинуть, тогда старая вершина исчезнет, а образуется две новых вершины и одно новое ребро).

Поставленная задача родственна так называемым *изопериметрическим задачам*, известным в геометрии. Суть их состоит в том, чтобы, например, из всех плоских фигур с одинаковым периметром (отсюда и название – «изопериметрические»), найти ту, площадь которой наибольшая. В трехмерном пространстве изопериметрическая задача ставится аналогично – из всех тел, имеющих одинаковую площадь поверхности, найти форму максимального объема. Для многогранников подобная задача формулируется несколько иначе – каким условиям должен отвечать многогранник определенного типа и данного объема, чтобы площадь его поверхности была минимальной? Ответ на этот вопрос мы находим в [3]: “...Наилучший в нашем смысле среди всех многогранников с заданным числом граней так описан вокруг шара, что грани касаются шара в своих центрах тяжести”.

Здесь требуется уточнить, что в данной формулировке подразумевается, видимо, что у многогранника задано не только число граней, но и их взаимное расположение, т.е. его тип. Тогда следует иметь в виду, что не каждый тип многогранника может быть приведен к такой конфигурации, когда все его грани касаются вписанного шара. Иногда, при перемещении некоторой грани до этого касания, тип многогранника может измениться – такой, например, полуправильный многогранник кубооктаэдр. Чтобы не вносить дополнительных усложнений, мы не будем рассматривать многогранники, которые не сохраняют типа, если все его грани приводятся к касанию к вписанному шару, тем более что в системе сжатых капель такой формы ячеек не бывает.

Читатель, возможно, начал недоумевать – решая задачу поиска конфигурации многогранника с минимальным индексом, мы говорим о площади его поверхности. Недоумение это легко рассеивается следующим - есть гипотеза, что когда конфигурация многогранника заданного типа и определенного объема отвечает условию минимальности площади поверхности, то эта же конфигурация имеет и минимальный индекс. Другими словами – площадь поверхности и индекс проявляют одинаковый характер зависимости от конфигурации тела. Гипотеза эта имеет следующее обоснование - любой выпуклый многогранник, если все его грани касаются вписанной сферы, можно рассматривать как некоторое приближение сверху по площади поверхности к этой сфере. Если у многогранника минимальная площадь поверхности при заданном типе и объеме, то, следовательно, он имеет конфигурацию, максимально приближенную к вписанной в него сфере, поэтому радиус вписанной сферы у него наибольший, а разность его объема и объема этой сферы – минимально возможная для данного типа. Теперь представим, что рассматриваемый многогранник – это полость контейнера, у которого все стенки подвижные, а вписанная сфера – это капля жидкости, еще не деформированная, но касающаяся всех стенок контейнера как, например, изображено на рис.3.1. Тогда разность объемов полости и капли – это объем пустот, и объем этот минимально возможный для данного типа многогранника (потому, что, как уже сказано, объем многогранника заданный, а объем сферической капли жидкости в нем – наибольший из возможных). Когда плоскости начнут сжимать каплю так, что ячейка будет оставаться подобной исходной форме контейнера, объем пустот будет, естественно, уменьшаться вместе с уменьшением радиуса свободной поверхности жидкости. Основное предположение заключается в том, что на протяжении всего процесса сжатия капли объем пустот будет

всегда наименьшим из возможных, а радиус свободной поверхности – наибольшим для данного (уже переменного) объема ячейки. Тогда из (4.9) получится, что индекс многогранника у этой формы ячейки минимальный.

Приняв эту гипотезу, решение поставленной задачи находим просто – чтобы у многогранника заданного типа и определенного объема был минимальным индекс, необходимо его грани повернуть и передвинуть так, чтобы все они касались вписанного шара в своих центрах тяжести. Из этой же гипотезы следует в частности, что у всех правильных многогранников величины индексов минимальны в своем типе. Это относится и к равногранно - полуправильным многогранникам, у каждого из которых, как известно, все двугранные углы одинаковы. Любое отклонение их формы от исходной вызывает увеличение не только площади поверхности, но и индекса, и чем сильнее форма искажается, тем больше становятся эти значения.

Для примера приведем индексы правильных многогранников. На рис.4.6 изображены эти многогранники, а рядом с каждым из них стоит числовое значение площади поверхности S тела единичного объема, суммарная длина ребер L , величина двугранных углов α и индекс Ih_0 . Как видим, при переходе от одной формы к другой с увеличением числа граней значение индекса резко падает, так как растут двугранные углы, хотя суммарная длина ребер в целом увеличивается.

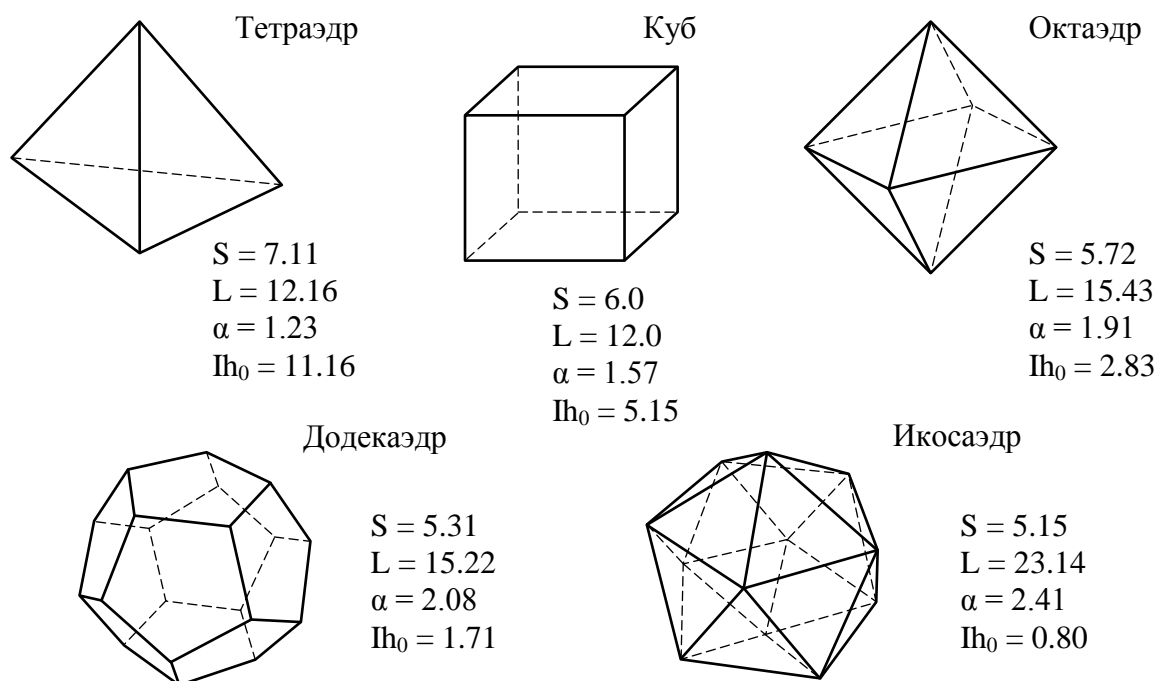


Рис.4.6. Правильные многогранники и числовые характеристики этих тел единичного объема.

Поскольку нам пришлось коснуться темы минимальной площади поверхности многогранника, будет уместным дополнить ее в той мере, в какой она потребуется в дальнейшем. А в дальнейшем встанет необходимость знать условия, при которых достигается минимум площади поверхности многогранника постоянного объема, для которого заданы направления граней. При таком ограничении уже нельзя поворачивать грани, как раньше, чтобы добиться касания вписанного шара в центрах тяжести, но можно только передвигать грани, не меняя их ориентации. Исчерпывающие сведения на этот

случай дает теорема Линделефа*: «Среди всех выпуклых многогранников, равновеликих заданному выпуклому многограннику и имеющих те же направления граней, наименьшей площадью поверхности обладает касательный многогранник некоторого шара» [5]. Как видим, во всех случаях, необходимым условием минимума площади поверхности любого выпуклого многогранника является касание всеми его гранями вписанного шара.

Обратим внимание еще на одно полезное свойство экстремального многогранника, хотя вскользь оно уже упоминалось – среди выпуклых многогранников одинакового объема наименьшей площадью поверхности обладает тот, у которого радиус вписанного шара наибольший. Это утверждение следует из одного *изопериметрического неравенства*, приведенного в [3]. Не затрагивая большую и интересную тему изопериметрических неравенств, отметим только, что эти неравенства дают оценку соотношения объема и площади поверхности различных тел через другие их геометрические характеристики.

Теперь посмотрим, как вычисляется давление в капле при изменении ее формы. Допустим, деформированная капля жидкости, объемом V сжата в ячейке, форму которой обозначим A объемом P_A с давлением p_A . После дополнительной деформации форма ячейки стала другой – обозначим ее B , объемом P_B . Необходимо найти конечное давление p_B . Для простоты будем считать, что в обоих случаях капля сжата достаточно сильно, и можно пользоваться величиной индекса многогранника Ih_0 (выражение (4.12)) вместо индекса ячейки Ih . В общем случае будем считать, что объемы ячеек не одинаковы: $P_A \neq P_B$. Поскольку их объемы могут различаться только за счет различия объемов пустот, а объем пустот при сильном сжатии капли значительно меньше объема ячейки, то следует иметь в виду, что различие в объемах ячеек P_A и P_B очень мало.

Представим, что процесс деформации капли происходит в два этапа – сначала ячейка деформируется из формы A в форму B без изменения объема – обозначим это состояние $B1$ (формы B и $B1$ подобны, а объем $P_{B1} = P_A$). При этом объем пустот не изменился, и согласно формуле (4.10) запишем:

$$\frac{1}{2} Ih_{0A} \frac{f^2}{P_A^2} = \frac{1}{2} Ih_{0B} \frac{f^2}{P_{B1}^2} \quad (4.13)$$

откуда давление в конце первого этапа:

$$P_{B1} = P_A \sqrt{\frac{Ih_{0B}}{Ih_{0A}}} \quad (4.14)$$

Второй этап деформации – ячейка не меняет своей конфигурации, но изменяет объем. Это изменение происходит, как известно, за счет изменения объема пустот, т.е.:

$$\frac{Vh_B}{Vh_{B1}} = \frac{P_B - V}{P_{B1} - V} = \frac{\frac{1}{2} Ih_{0B} \frac{f^2}{P_B^2}}{\frac{1}{2} Ih_{0B1} \frac{f^2}{P_{B1}^2}} \quad (4.15)$$

Учитывая, что $Ih_{0B1} \approx Ih_{0B}$, из последнего выражения получим:

* Линделеф, Лоренц Леонард (1827 - 1908) – финский математик и астроном.

$$p_B = p_{B1} \sqrt{\frac{P_{B1} - V}{P_B - V}} \quad (4.16)$$

Подставим сюда выражение (4.14) и заменим объем ячейки P_{B1} на равный ему P_A :

$$p_B = p_A \sqrt{\frac{P_A - V}{P_B - V}} \sqrt{\frac{Ih_{0B}}{Ih_{0A}}} \quad (4.17)$$

Если объем ячейки при деформации не изменился, то последнее выражение упрощается и становится аналогичным (4.14):

$$p_B = p_A \sqrt{\frac{Ih_{0B}}{Ih_{0A}}}, \quad (4.18)$$

Таким образом, мы выразили конечное давление жидкости через давление в начале деформации и параметры ячейки.

Найденная функциональная связь физического параметра – давления жидкости, с геометрическими условиями деформации жидкого тела будет играть большую роль в изучении свойств системы сжатых капель.

5. Энергия деформированной капли

Рассмотрим процесс сжатия капли в контейнере с энергетической стороны. Приложенная к поршню сила (рис.3.2), переменная по величине, заставляет его перемещаться - совершает работу. В это же время капля под поршнем деформируется, и все больше заполняет внутренность контейнера. Если эту силу неограниченно увеличивать, капля будет сжиматься до тех пор, пока совсем не заполнит отведенное ей пространство, а поршень при этом остановится, какую бы большую силу к нему ни прикладывали – ведь сама жидкость несжимаема. Совершение работы на этом прекратится.

Теперь начнем потихоньку отпускать поршень, уменьшая приложенную к нему силу и позволяя ему перемещаться назад в исходное положение. Форма капли будет меняться в обратном порядке, расширяя пустоты в углах и стягивая поверхности контакта в точку, пока она опять не превратится в сферу. Здесь поршень остановится, потому что сила станет равной нулю. Это значит, что ту работу, которую совершила сжимающая сила при перемещении поршня вправо, капля вернула всю без остатка на обратном пути (трение, как мы приняли, равно нулю) – налицо аккумулялирование механической энергии. В каком же виде капля аккумулялирует эту энергию?

Понятно, что внутри капли нет движений жидкости, кроме тех, которые вызваны ее деформацией, нет и тепловых колебаний частиц – понятие внутренней энергии здесь отсутствует. Сама жидкость в объеме, как известно, не обладает упругостью и ее перемещение не вызывает никаких сил, а потому форма капли сама по себе не играет никакой роли. Остается предположить, что энергия, которой обладает деформированная капля, заключена в ее поверхности. Эта специфическая поверхностная энергия известна давно, как известен и простой опыт с мыльной пленкой, натянутой на прямоугольную рамку с одной подвижной стороной – для перемещения подвижной стороны нужно совершить работу:

$$A = f (S_2 - S_1),$$

где:

f - коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки,

S_1, S_2 - площадь поверхности пленки, соответственно в начале и в конце растяжения (необходимо помнить, что пленка имеет две поверхности – сверху и снизу).

Чтобы подтвердить нашу гипотезу о поверхностной природе энергии капли, нужно убедиться в том, что с увеличением деформации растет площадь ее поверхности, и что этот рост идет соразмерно работе деформирующей силы.

Здесь мы подошли к необходимости уметь вычислять площадь поверхности деформированной капли. Как и при нахождении объема пустот в разделе 4, сначала решим эту задачу в общем виде. Для этого примем, что ячейка так же, как и ранее, имеет форму произвольного выпуклого многогранника с n ребрами и m вершинами. Обозначим площадь поверхности этого многогранника S_p , а искомую площадь поверхности деформированной капли – S . Тогда, привычно разбив свободную поверхность жидкости на цилиндрические участки – на ребрах ячейки и угловые участки – в вершинах, найдем разность площадей:

$$S_p - S = \sum_{i=1}^n L_{Ci} (l_{FBEi} - l_{FLEi}) + \sum_{j=1}^m \Delta S_{Vj} \quad (5.1)$$

где: L_{Ci} - длина цилиндрического участка свободной поверхности жидкости на i -ом

ребре;

l_{FBEi} – длина сечения двугранного угла на i -ом ребре (см. рисунок 4.4);

l_{FLEi} – длина сечения свободной поверхности жидкости на i -ом ребре (там же).

ΔS_{vj} – разность между площадью многогранного угла в j -ой вершине и площадью углового участка поверхности жидкости под этой вершиной.

Если взглянуть на формулу (4.1) предыдущего раздела, то можно заметить, что она похожа на (5.1). Более того, все, что там написано после нее, справедливо и в данном случае, а именно – вторая сумма в (5.1) может быть вычислена только в результате аналитического расчета поверхности жидкого тела заданной формы. Чтобы искомое выражение сохранило общность, избавимся от второй суммы, а учтем ее в выражении под знаком первой суммы. Для этого, как и раньше, вместо длины цилиндрического участка L_{Ci} на каждом ребре берем полную длину L_i этого ребра с некоторой добавкой ΔL_i . Тогда выражение (5.1) примет вид:

$$S_P - S = \sum_{i=1}^n (L_i + \Delta L_i)(l_{FBEi} - l_{FLEi}) \quad (5.2)$$

Основываясь на рис.4.4, найдем длину сечения двугранного угла:

$$l_{FBE} = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (5.3)$$

Длина сечения свободной поверхности жидкости:

$$l_{FLE} = r(\pi - \alpha) \quad (5.4)$$

Подставив эти выражения в формулу (5.2), получим:

$$S_P - S = r \sum_{i=1}^n (L_i + \Delta L_i) \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} + \alpha_i - \pi \right) \quad (5.5)$$

Расчеты свободной поверхности жидкости, сжатой в некоторых многогранных углах, показывают, что и здесь, при определении площади поверхности, добавка ΔL_i почти не зависит от величины двугранного угла на ребре ячейки и может быть принята одинаковой для всех ребер и равной так же $3r$, Тогда выражение (5.5) примет окончательный вид:

$$S_P - S = r \sum_{i=1}^n (L_i + 3r) \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} + \alpha_i - \pi \right) \quad (5.6)$$

Примечательно, что сумма в этом выражении, если в ней заменить r на r_0 (см. абзац после формулы (4.7) предыдущего раздела) – это тот же индекс ячейки Ih , введенный ранее (выражение (4.8)). Тогда разность площадей поверхности ячейки и капли запишется просто:

$$S_P - S = Ih r \quad (5.7)$$

(сравните с формулой (4.9)), а площадь поверхности сжатой капли равна:

$$S = S_P - Ih r \quad (5.8)$$

Теперь можно приступить к проверке нашего предположения о поверхностной природе энергии капли. Для этого сначала найдем зависимость площади ее поверхности от перемещения поршня. На рисунке 5.1 даны необходимые для этого чертежи. Расчет будем проводить для капли единичного объема. Начало координат совместим с исходным положением поршня, а ось X направим вправо – в сторону его рабочего перемещения. Таким образом, координата x указывает текущее положение поршня.

Вспомним, что изначально контейнер был сделан по размеру свободной сферической капли, диаметр которой равен a . Исходя из принятого условия единичного объема, найдем этот размер:

$$a = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} = 1.2407 \quad (5.9)$$

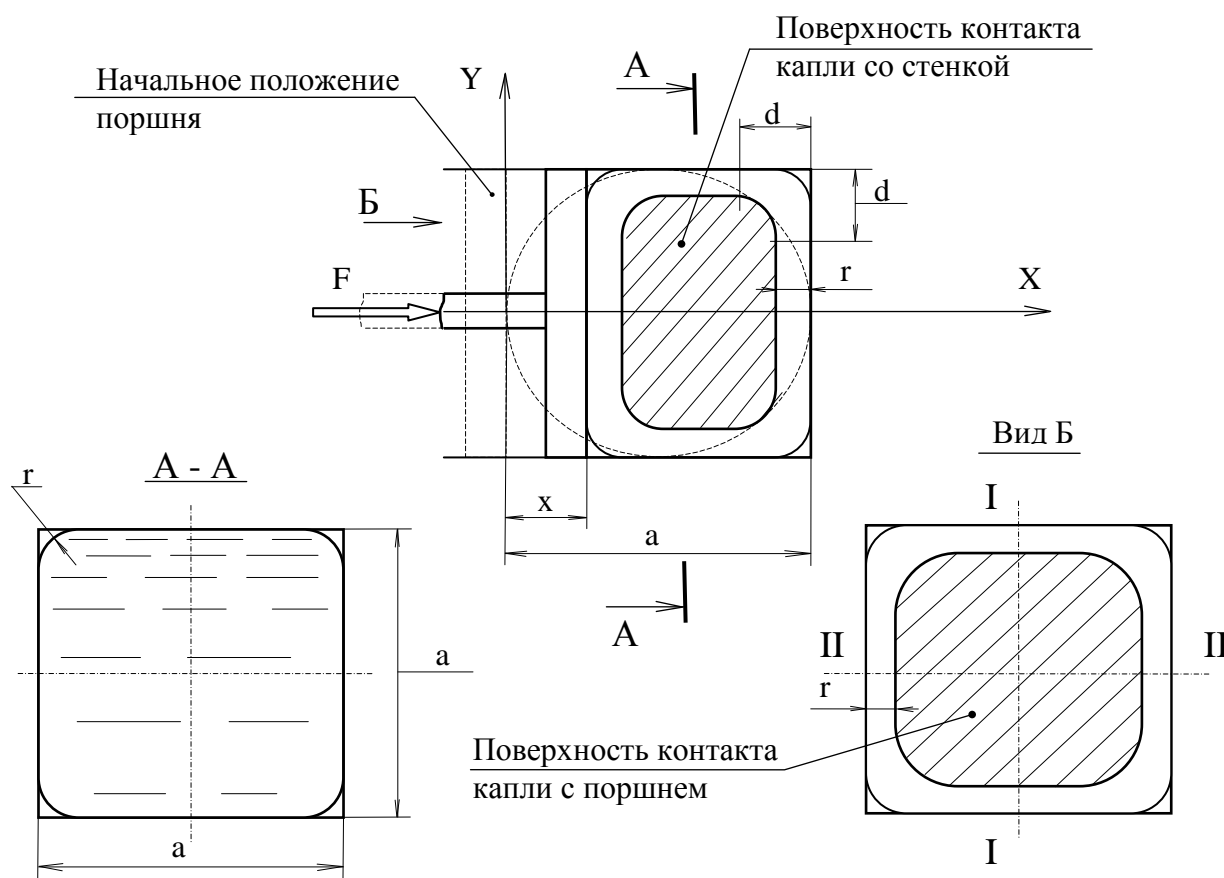


Рис.5.1. Чертеж капли, сжатой в контейнере, для расчета зависимости площади поверхности от перемещения поршня.

Проследим за изменением формы поверхности капли в процессе сжатия. В начальном положении поршня исследуемая поверхность имеет простую сферическую форму. При небольшом смещении поршня вправо на ней появляются плоские участки контакта со стенками, а форма свободной поверхности уходит от сферической – о ней в этот момент можно сказать только одно – вся она разбивается плоскостями симметрии на 8 одинаковых участков – по числу вершин параллелепипеда. При дальнейшем смещении поршня поверхности контакта расширяются, а свободная поверхность деформируется сильнее, но в каждом новом положении форма ее меняется. В какой-то момент под самыми длинными ребрами ячейки на свободной поверхности жидкости появляются

участки цилиндрической формы. То есть сечения этой поверхности плоскостями, проходящими через середины длинных ребер, имеют вид дуги окружности радиусом r (на рис.5.1, вид Б эти плоскости обозначены I – I и II – II). Сначала эти цилиндрические участки имеют нулевую длину, но при дальнейшем сжатии капли их длина увеличивается, а радиус r уменьшается. Остальная часть свободной поверхности продолжает изменять свою форму, но в меньшей степени, чем до появления первой цилиндричности. Наконец, наступает момент, когда участки цилиндрической формы на поверхности жидкости появляются и под самыми короткими – параллельными оси X – ребрами полости. Это положение поршня, обозначенное ниже x_1 , является началом его расчетного пути, так как с этого момента вся свободная поверхность может быть разбита на участки, форма которых уже не меняется при любых дальнейших сжатиях капли. Под постоянством формы здесь нужно понимать то, что цилиндрические участки остаются таковыми, хотя их длина и радиус изменяются, а угловые участки сохраняют свои пропорции и вид аналитического выражения, о чем уже говорилось в разделе 3, хотя тоже изменяются в размерах.

Поскольку мы умеем рассчитывать свободную поверхность жидкости, только когда форма ее участков не зависит от степени деформации капли, все вычисления будут проводиться для положений поршня, правее точки x_1 .

Напишем выражение индекса ячейки согласно формуле (4.8) как функцию перемещения поршня. Здесь все двугранные углы одинаковы, постоянны и равны $\pi/2$:

$$Ih(x) = (8a + 4(a - x) + 36 r(x))(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi) \quad (5.10)$$

Теперь, зная индекс ячейки, по формуле (4.9) выразим объем пустот:

$$V_h(x) = \frac{1}{2} (8a + 4(a - x) + 36 r(x))(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi) r^2(x) \quad (5.11)$$

Нетрудно видеть, что эта величина и объем самой капли в сумме дадут полный текущий объем полости контейнера, т.е.:

$$V_h(x) + 1 = a^2(a - x) \quad (5.12)$$

Если в это уравнение подставить выражение (5.11) и значение $a = 1.2407$, то после преобразований получим:

$$r^3(x) + (0.414 - 0.111x) r^2(x) + 0.199x - 0.118 = 0 \quad (5.13)$$

Решая это кубическое уравнение, находим зависимость радиуса r свободной поверхности жидкости от перемещения поршня x :

$$\begin{aligned} r(x) = & -0.333 (0.414 - 0.111 x) + (0.420 (0.414 - 0.111 x)^2) / (3.038 - 5.266 x - \\ & 0.0306 x^2 + 0.0027 x^3 + 4.116 \times 10^{-11} \sqrt{36.496 - x} \sqrt{x - 0.591} \sqrt{x - 0.559} \times \\ & \sqrt{x + 25.888} \sqrt{1.742 \times 10^{19} - 4.243 x + x^2})^{1/3} + 0.265 (3.038 - 5.266 x - \\ & 0.0306 x^2 + 0.00274 x^3 + 4.116 \times 10^{-11} \sqrt{36.496 - x} \sqrt{x - 0.591} \sqrt{x - 0.559} \times \\ & \sqrt{x + 25.888} \sqrt{1.742 \times 10^{19} - 4.243 x + x^2})^{1/3} \end{aligned} \quad (5.14)$$

(понятно, что это решение получено не «ручным» способом, а при помощи математической программы).

Найдем координату x_1 начала расчетного пути поршня. Когда он находится в этой точке, длина коротких ребер полости равна удвоенному размеру d угловых участков свободной поверхности жидкости (см. рис.3.4 и выражение (3.15)):

$$a - x_1 = 2 * 3.941 r(x_1) \quad (5.15)$$

Если сюда подставить $a = 1.2407$, применить выражение (5.14) и решить уравнение, то получим $x_1 = 0.576$.

Теперь определим координату конечного положения. Эта теоретическая точка соответствует положению поршня, при котором жидкость заполняет всю полость контейнера и не остается никаких пустот. Теоретической эта точка является потому, что здесь радиусы свободной поверхности должны стать равными нулю, а давление - бесконечности, поэтому практически поршень никогда не сможет достичь ее. В этом положении внутренний объем контейнера равен объему капли, то есть:

$$a^2 (a - x_2) = 1 \quad (5.16)$$

Отсюда, зная величину a , получим $x_2 = 0.591$.

Как видим, ход поршня от x_1 до x_2 , на котором действительны все наши расчеты, очень короткий по сравнению с его полным перемещением, поэтому для простоты примем индекс ячейки здесь постоянным и равным его значению в x_1 . Чтобы его найти, в формулу (5.10) подставим зависимость (5.14) для радиуса, а полученное расширенное выражение при $a = 1.2407$ и $x = 0.576$ даст искомую величину индекса $Ph_1 = 6.706$.

Продолжим определение зависимости площади поверхности капли от перемещения поршня. Для этого сначала выразим площадь поверхности ячейки как сумму всех ее граней:

$$S_p(x) = 2a^2 + 4a(a - x) \quad (5.17)$$

Затем в формулу (5.8) подставим это выражение, а так же найденное значение Ph_1 и величину a . В результате этих подстановок и преобразований получим:

$$S(x) = 9.236 - (4.963 + 6.706 r(x))x \quad (5.18)$$

В этой формуле помимо координаты x фигурирует еще и радиус $r(x)$. Чтобы оставить зависимость площади поверхности только от x , нужно заменить $r(x)$ его выражением (5.14). Полученная запись имеет очень громоздкий вид, поэтому здесь не приводится.

Теперь вспомним ту главную задачу, ради которой проводились все расчеты – сравнить увеличение энергии поверхности капли с величиной работы силы F и на основе этого сделать заключение – действительно ли вся работа, затраченная на деформацию капли, переходит в энергию ее поверхности. Пока же мы только нашли зависимость площади поверхности от положения поршня $S(x)$ в диапазоне значений от $x_1 = 0.576$ до $x_2 = 0.591$. Выражение приращения энергии капли в этом диапазоне будет иметь вид:

$$\Delta E(x) = f (S(x) - S(x_1)) , \quad (5.19)$$

где f - коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Развернутая запись выражения (5.19) так же громоздка, и здесь не приводится, но ниже эта зависимость показана в виде графика.

Теперь о сжимающей силе. Работа силы, как известно, равна произведению ее величины на перемещение точки приложения силы в направлении ее действия. В нашем случае величина этой силы изменяется с перемещением поршня, поэтому искомое приращение работы выразится интегралом:

$$\Delta A(x) = \int_{x_1}^x F(x) dx \quad (5.20)$$

Величина силы $F(x)$, приложенной к поршню, равна:

$$F(x) = p(x) S_C(x), \quad (5.21)$$

где: $p(x)$ - давление в капле;

$S_C(x)$ - площадь поверхности контакта капли с поршнем.

Давление жидкости выразим через радиус свободной поверхности на цилиндрическом участке (см. формулу (3.2)):

$$p(x) = \frac{f}{r(x)}, \quad (5.22)$$

а площадь контактной поверхности капли с поршнем найдем из рисунка 5.1 (вид Б):

$$S_C(x) = (a - 2r(x))^2 - \pi r(x)^2 \quad (5.23)$$

(здесь использовано свойство кривой ВЕ (рис.3.5), которая образует скругления углов поверхности контакта - площадь дополнений всех четырех скругленных углов до прямых равна πr^2).

С этими значениями выражение (5.20) примет вид:

$$\Delta A(x) = f \int_{x_1}^x \left(\frac{a^2}{r(x)} - 4a + (4 - \pi)r(x) \right) dx \quad (5.24)$$

Если сюда подставить выражение (5.14) радиуса $r(x)$ и значение a , то вычисленный интеграл даст искомую зависимость работы от положения поршня (данный интеграл решается, разумеется, только численно).

На рисунке 5.2 представлены зависимости (5.19) и (5.24) в графическом виде. Величина коэффициента поверхностного натяжения жидкости здесь принята равной единице, поскольку для данной задачи ее действительное значение не играет никакой роли. Довольно близкий вид изображенных кривых показывает, что изменение энергии поверхности капли следует за величиной работы, затраченной на ее деформацию (их несовпадение вызвано предположением постоянства индекса ячейки).

В связи с полученным подтверждением поверхностной природы энергии капли снова обратимся к началу раздела 4. Там, если помните, описан поворот поршня вокруг горизонтальной оси, что привело к изменению формы ячейки. При этом повороте шток поршня был неподвижным, поэтому сила, приложенная к нему, не производила никакой работы. Но если сравнить площадь поверхности капли до поворота поршня и после, то

можно обнаружить, что во втором случае она заметно больше (это видно хотя бы из того, что увеличилась поверхность контакта жидкости с поршнем, а сумма остальных поверхностей почти не изменилась).

Что же здесь вызвало увеличение энергии поверхности капли? Ответ ясен – если увеличение поверхности произошло в результате поворота поршня, то для этого поворота требовалось совершить работу. Другими словами – чтобы повернуть поршень, к нему нужно приложить вращающий момент для преодоления противодействия капли этому повороту. Но откуда возникает это противодействие?

На рис.5.3 изображено сечение контейнера с нормальным положением поршня, и сечение эпюры контактных давлений p жидкости на него. Как видим, эпюра эта симметрична относительно оси поворота, проходящей через точку O , следовательно, никакой вращающий момент со стороны жидкости на поршень не действует.

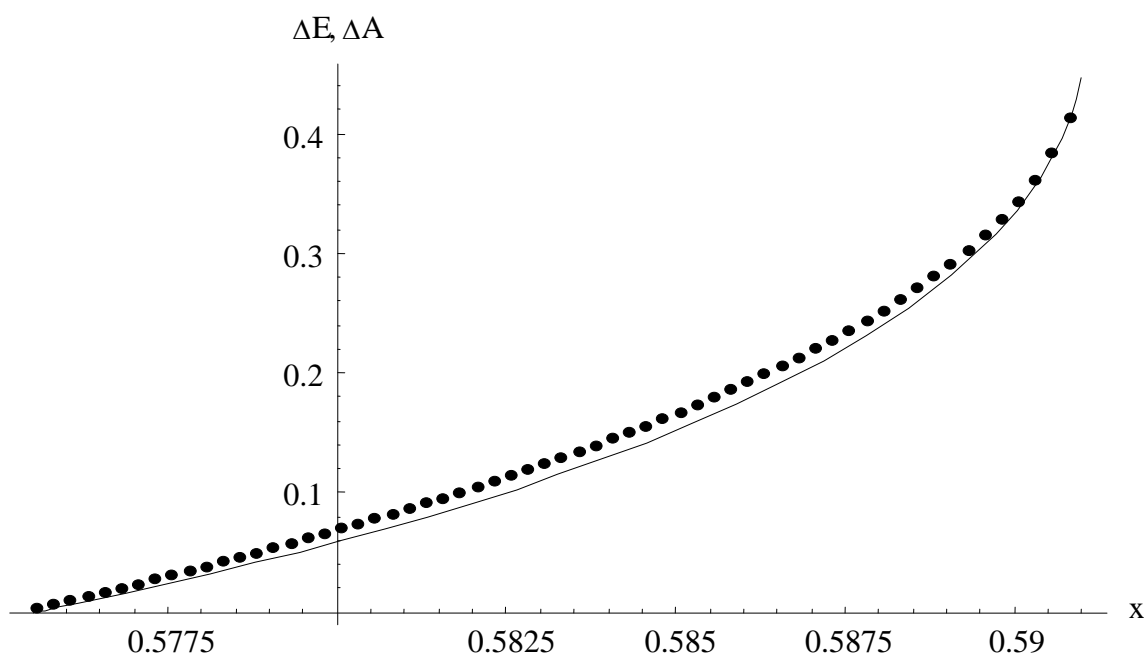


Рис.5.2. Зависимость приращения энергии поверхности капли (сплошная кривая) и приращения работы деформирующей силы (точечная кривая) от перемещения поршня в контейнере.

На рис.5.4 показано сечение, в котором поршень наклонен. Здесь уже эпюра контактных давлений не симметрична относительно оси поворота поршня, что приводит к смещению равнодействующей N сил давления в сторону выше оси. Этот эксцентриситет e и вызывает необходимость прикладывать к поршню внешний вращающий момент M , чтобы удерживать его в наклонном положении.

Причина смещения вверх площадки контакта жидкости с поршнем понятна из рисунка – она все в том же различии заполнения жидкостью тупого и острого двугранных углов, о чем говорилось в начале прошлого раздела.

Проверим соблюдение равенства работы, затраченной на деформацию капли, с приращением энергии ее поверхности при повороте поршня. Полагаем, что прежде, чем начать наклоняться, поршень сдавил каплю под действием силы F до некоторого состояния, и остановился в точке с координатой x_m . Эта точка должна находиться на расчетном пути поршня между значениями $x_1 = 0.576$ и $x_2 = 0.591$, найденными выше.

Примем $x_m = 0.580$ и подставим это значение в выражение (5.14) радиуса. Отсюда найдем, что в начале поворота поршня жидкость имела радиус свободной поверхности $r_0 = 0.07234$.

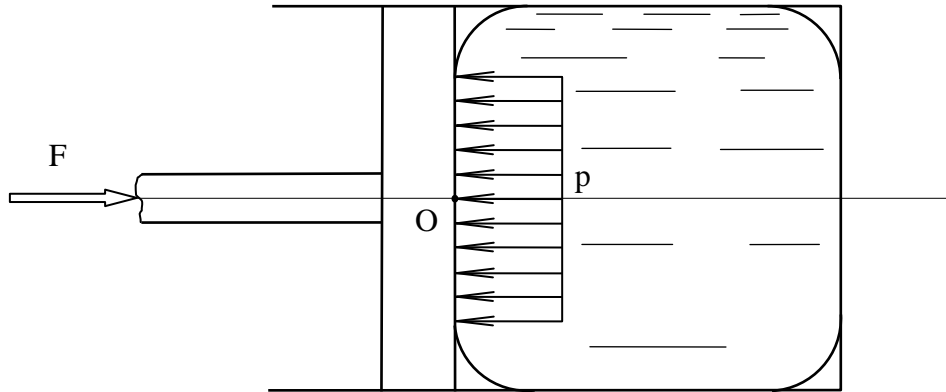


Рис. 5.3. Давление жидкости на поршень в нормальном положении.

Рассмотрим поршень в произвольном наклонном положении (рис.5.4) с углом наклона $\Delta\alpha$ и запишем выражение индекса ячейки:

$$\begin{aligned}
 Ih(\Delta\alpha) = & \left(4a + 4(a - x_m) + \frac{2a}{\cos \Delta\alpha} + 30r_0 \right) \left(2ctg \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \pi \right) + \\
 & (a + 3r_0) \left(2ctg \frac{\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} + \Delta\alpha - \pi \right) + \\
 & (a + 3r_0) \left(2ctg \frac{\frac{\pi}{2} - \Delta\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \Delta\alpha - \pi \right);
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Как видим, это выражение состоит из трех крупных слагаемых. Первое слагаемое учитывает все ребра ячейки, на которых двугранный угол сохраняет постоянное значение, равное $\pi/2$. Это 4 ребра квадратной стенки контейнера, расположенной напротив поршня, 4 горизонтальных ребра, параллельных оси X (хотя их длина изменяется при повороте поршня, суммарная остается постоянной), и два наклонных ребра на поршне. Второе слагаемое в выражении (5.25) относится к ребру CC' с тупым двугранным углом $\pi/2 + \Delta\alpha$, а последнее слагаемое – к ребру BB' с острым двугранным углом $\pi/2 - \Delta\alpha$.

Подставив в (5.25) значения $a = 1.2407$, $x_m = 0.580$ и $r_0 = 0.07234$, после преобразований получим простое выражение:

$$Ih(\Delta\alpha) = \frac{6.896}{\cos \Delta\alpha} - 0.384 \tag{5.26}$$

Из этого выражения при $\Delta\alpha = 0$ найдем, чему был равен индекс ячейки непосредственно перед началом поворота поршня - $Ih_m = 6.512$.

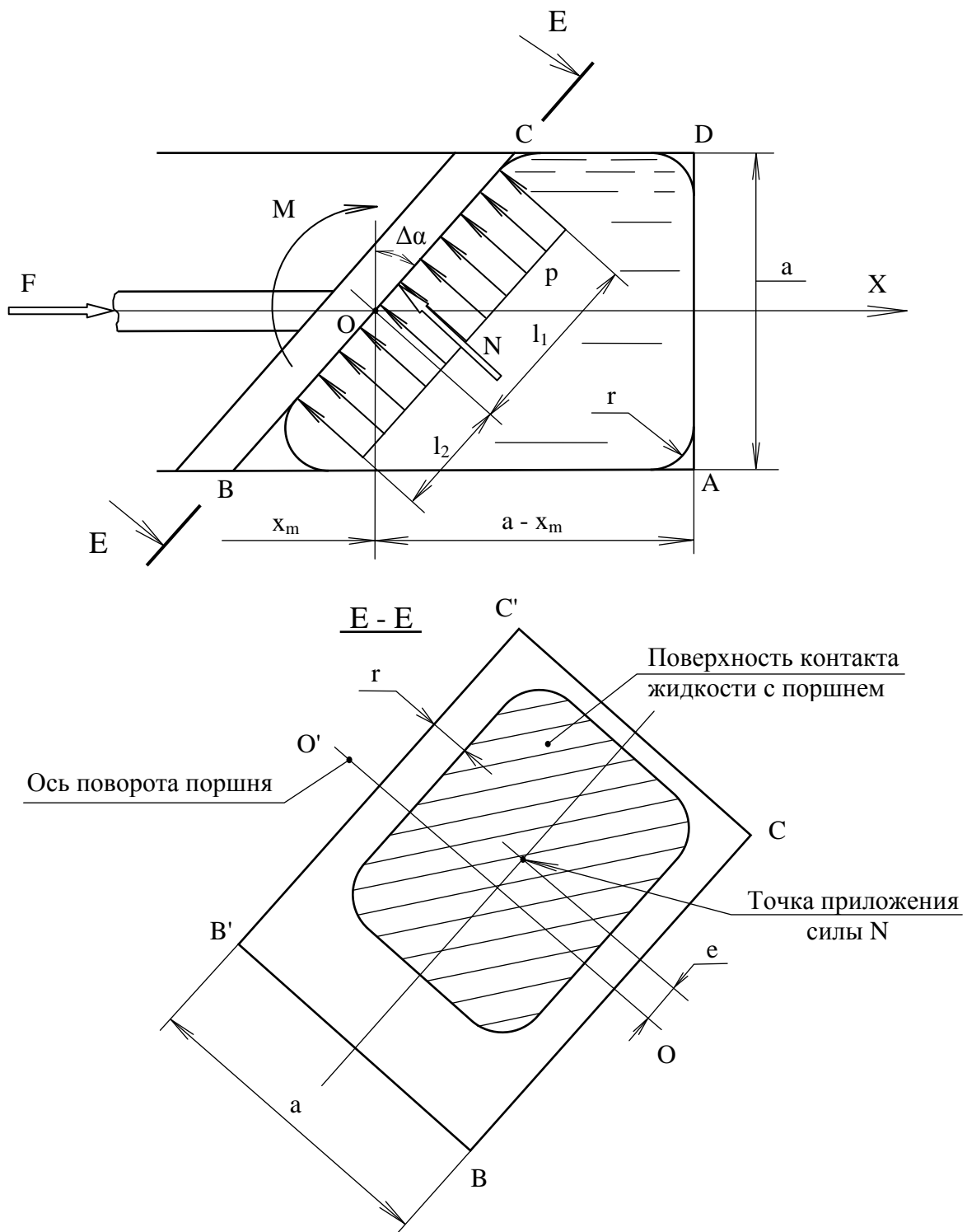


Рис. 5.4. Давление жидкости на поршень в наклонном положении.

Теперь при помощи формулы (4.18) с учетом (3.2) напишем выражение радиуса свободной поверхности капли при любом угле наклона поршня:

$$r(\Delta\alpha) = r_0 \sqrt{\frac{Ih_m}{Ih(\Delta\alpha)}} \quad (5.27)$$

Подставив сюда известные значения r_0 и h_m , а так же выражение (5.26), после преобразований получим:

$$r(\Delta\alpha) = \frac{0.185}{\sqrt{6.896/\cos \Delta\alpha - 0.384}} \quad (5.28)$$

Теперь уже можно искать зависимость площади поверхности капли от угла $\Delta\alpha$. Для этого сначала выразим поверхность самой ячейки, учитывая, что при любом наклоне поршня суммарная площадь всех ее неподвижных граней постоянна, а изменяется только площадь наклонной грани, т.е.:

$$S_p(\Delta\alpha) = \left(a + 4(a - x_m) + \frac{a}{\cos \Delta\alpha} \right) a \quad (5.29)$$

С известными числовыми значениями a и x_m это же выражение после преобразований примет вид:

$$S_p(\Delta\alpha) = \frac{1.539}{\cos \Delta\alpha} + 4.818 \quad (5.30)$$

Искомая зависимость получится, если в формулу (5.8) подставить выражения (5.26), (5.28) и (5.30). После такой подстановки и преобразований находим окончательное выражение площади поверхности капли:

$$S(\Delta\alpha) = \frac{1.539}{\cos \Delta\alpha} - 0.185 \sqrt{\frac{6.896}{\cos \Delta\alpha} - 0.384} + 4.818 \quad (5.31)$$

При $\Delta\alpha = 0$ оно дает значение площади перед началом поворота поршня: $S_m = 5.814$.

Наконец, получены все данные, чтобы построить зависимость приращения энергии поверхности капли от угла поворота поршня, согласно выражению:

$$\Delta E(\Delta\alpha) = (S(\Delta\alpha) - S_m) f \quad (5.32)$$

Ниже эта зависимость приведена в виде графика, а сейчас перейдем к определению работы вращающего момента, приложенного к поршню. Для этого сначала найдем размеры l_1 и l_2 поверхности контакта. Из рисунков 5.4 и 4.4 получаем выражения:

$$\begin{aligned} l_1(\Delta\alpha) &= \frac{a}{2 \cos \Delta\alpha} - r \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \\ l_2(\Delta\alpha) &= \frac{a}{2 \cos \Delta\alpha} - r \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Далее последовательно находим:

- площадь поверхности контакта жидкости с поршнем:

$$S_c(\Delta\alpha) = (l_1(\Delta\alpha) + l_2(\Delta\alpha))(a - 2r(\Delta\alpha)) - \pi r(\Delta\alpha)^2 / \cos \Delta\alpha \quad (5.34)$$

(последний член здесь учитывает скругления углов наклонной контактной поверхности, как в формуле (5.23));

- сила давления жидкости на поршень:

$$N(\Delta\alpha) = p(\Delta\alpha) S_C(\Delta\alpha) = \frac{f}{r(\Delta\alpha)} S_C(\Delta\alpha); \quad (5.35)$$

- расстояние от точки приложения силы N до оси поворота поршня:

$$e(\Delta\alpha) = \frac{1}{2}(l_1(\Delta\alpha) - l_2(\Delta\alpha)); \quad (5.36)$$

- момент, приложенный к поршню для удержания его в наклонном положении:

$$M(\Delta\alpha) = N(\Delta\alpha) e(\Delta\alpha). \quad (5.37)$$

Подставив в выражение (5.37) последовательно в обратном порядке четыре выражения, предшествующих ему, после преобразований найдем зависимость момента от угла поворота поршня:

$$M(\Delta\alpha) = (a^2 - 4ar(\Delta\alpha) + (4 - \pi)r(\Delta\alpha)^2) \frac{tg\Delta\alpha}{\cos\Delta\alpha} f \quad (5.38)$$

Найдем работу, которую совершает момент M при повороте поршня из вертикального положения на угол $\Delta\alpha$. Поскольку величина этого момента зависит от наклона поршня, работа равна интегралу:

$$\Delta A(\Delta\alpha) = \int_0^{\Delta\alpha} M(\Delta\alpha) d\Delta\alpha = f \int_0^{\Delta\alpha} (a^2 - 4ar(\Delta\alpha) + (4 - \pi)r(\Delta\alpha)^2) \frac{tg\Delta\alpha}{\cos\Delta\alpha} d\Delta\alpha \quad (5.39)$$

Остается подставить сюда значение $a = 1.2407$, выражение (5.28) радиуса, и проинтегрировать. В результате получим зависимость работы внешнего момента, приложенного к поршню, от его конечного угла наклона. График этой зависимости представлен на рис.5.5. Здесь же изображен график функции (5.32) приращения энергии капли при повороте поршня. В обоих случаях коэффициент поверхностного натяжения f жидкости принят равным единице, как и ранее.

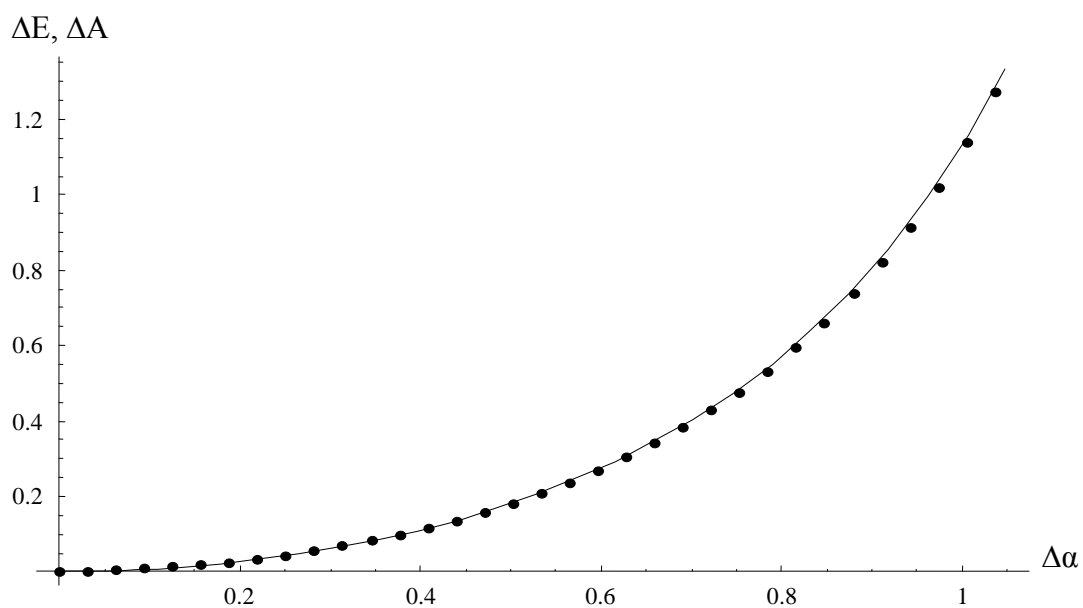


Рис.5.5. Зависимость приращения энергии поверхности капли (сплошная кривая) и работы вращающего момента, приложенного к поршню (точечная кривая), от угла поворота поршня.

Бесспорное совпадение этих кривых окончательно подтверждает нашу гипотезу, что работа, затраченная внешними силами на деформацию капли, целиком переходит в энергию ее поверхности. Отсюда следует, что если капля деформируется под действием внешних сил, которые при этом совершают работу, то площадь ее поверхности увеличивается.

6. Совместная деформация капель

До сих пор мы осуществляли деформацию капли при помощи жестких поверхностей, которые и определяли ее общую конфигурацию. В таких условиях у жидкости имеется только одна степень свободы, которая позволяет ей реагировать своим внутренним давлением на изменение формы – это наличие пустот над свободной поверхностью. Если же каплю лишить этой поверхности, оставив только контактную, то она перестанет сама регулировать свое внутреннее давление.

Так, если сделать полость контейнера со скругленными ребрами и вершинами, и сжать в нем каплю настолько, чтобы она заполнила все внутреннее пространство, не оставив пустот и, соответственно, свободной поверхности, то связь внутреннего давления с внешней формой разорвется, а понятие ячейки потеряет смысл.

Предоставим капле, сжатой в обычном контейнере, еще одну степень свободы – ограничим ее с одной стороны не жесткой стенкой, а другим таким же жидким телом, и посмотрим, какие новые свойства проявятся в этом случае. Как и ранее, возьмем контейнер квадратного сечения, сторона которого равна диаметру a недеформированной капли, и поместим в него – одну за другой – две одинаковые капли (говоря о нескольких каплях, мы всегда будем подразумевать, что у них одинаковый объем и одинаковый коэффициент поверхностного натяжения). После этого сожмем их поршнем, приложив силу F . На рис.6.1 показано продольное сечение этого контейнера. Как и ранее, ось X направим вдоль его оси в сторону движения поршня на сжатие, а положение начала координат в данном случае не имеет значения.

Поскольку, как уже принято, трение между каплями и стенками отсутствует, обе капли находятся в равных условиях, поэтому давления p_1 и p_2 в жидкостях одинаковы, форма и объем ячеек совпадают. При таком сжатии у капель никаких новых свойств не проявляется, как если бы каждая из них находилась в контейнере одна.

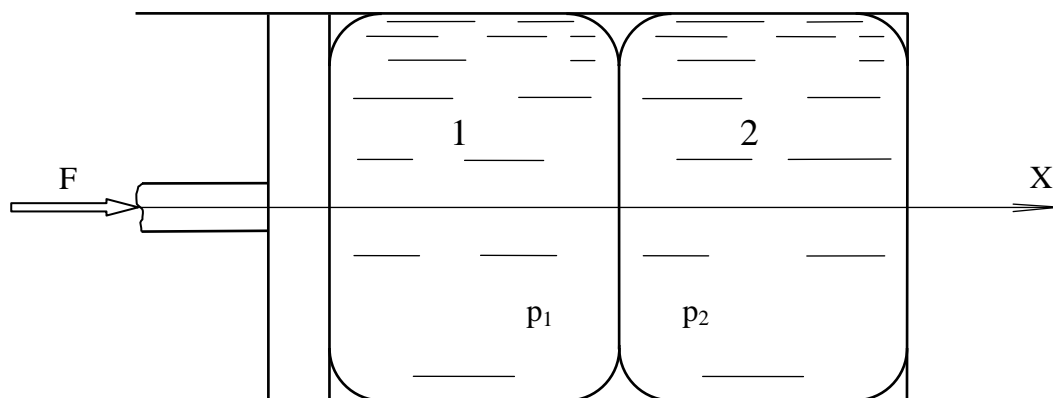


Рис. 6.1. Сжатие в контейнере двух одинаковых капель.

Но давайте изменим условия сжатия – оставив поршень в том же положении по оси X , повернем его вокруг горизонтальной оси на угол $\Delta\alpha$, как делали раньше. Мы знаем, что объем полости от этого поворота не изменится, но давление в капле 1 вырастет. Встает вопрос – как при этом изменится давление в капле 2? Чтобы ответить на него, обратимся к

теоретической механике. Один из ее принципов гласит: если действующие на систему внешние силы уравновешены, то так же уравновешены и ее внутренние силы. Под системой здесь понимается сам контейнер с его содержимым. По условию он закреплен и неподвижен, поэтому все внешние силы, действующие на него, уравновешены. Рассмотрим его внутренние силы. Таковыми являются силы давления жидкости на стенки и поршень, а так же контактные силы взаимодействия капель. Последние уравновешены всегда, как равные по величине и противоположно направленные силы действия и противодействия, поэтому они исключаются из рассмотрения.

Поскольку нашей задачей является определение соотношения давлений p_1 и p_2 после поворота поршня, достаточно принять во внимание только силы, дающие ненулевые проекции на ось X . На рис.6.2 изображены эти интересующие нас внутренние силы (место контакта двух капель не показано, т.к. не зная соотношения их давлений, ничего нельзя сказать о форме контактной поверхности). Таким образом, мы рассматриваем только силу N_{1X} – проекцию на ось X силы давления капли 1 на поршень, и силу N_2 давления капли 2 на стенку, противоположную поршню.

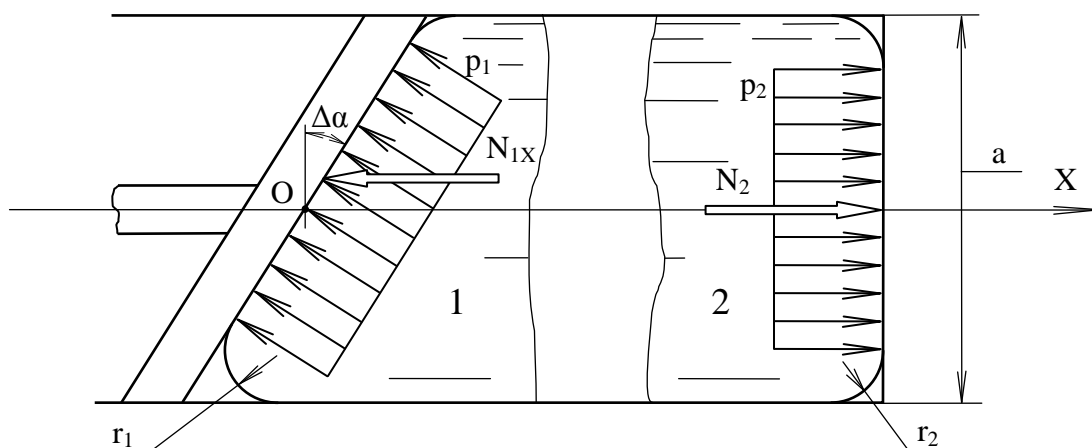


Рис. 6.2. К расчету соотношения давлений в каплях.

Напишем уравнение равновесия этих сил:

$$N_2 - N_{1X} = 0,$$

или развернуто:

$$\left((a - 2r_2)^2 - \pi r_2^2 \right) p_2 - N_1 \cos \Delta\alpha = 0 \quad (6.1)$$

Из выражений (5.33), (5.34) и (5.35) предыдущего раздела найдем:

$$N_1 = \frac{f}{r_1 \cos \Delta\alpha} \left(a^2 - 4ar_1 + (4 - \pi)r_1^2 \right) \quad (6.2)$$

Если подставить это выражение в (6.1), а давление p_2 заменить на $\frac{f}{r_2}$, то после преобразований получим уравнение:

$$f(r_1 - r_2)(a^2 - (4 - \pi)r_1 r_2) = 0$$

Здесь геометрический смысл имеет только одно решение: $r_2 = r_1$. Это значит, что давления в обеих каплях и в этом случае одинаковы, а поверхность контакта – плоская, как и должно быть при таких условиях (к вопросу условий мы вскоре вернемся). Полное сечение контейнера с наклонным поршнем изображено на рис.6.3.

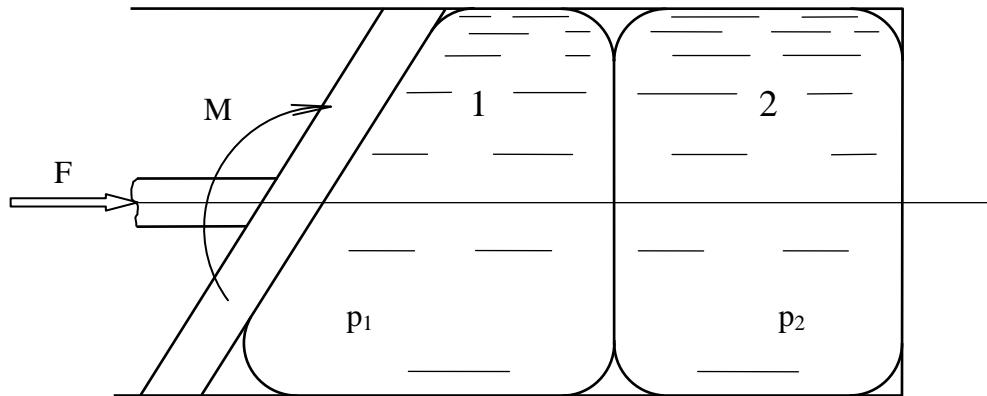


Рис. 6.3. По-разному деформированные капли с одинаковым давлением.

Что же нового проявилось в совместной деформации капель после поворота поршня? Новым свойством оказалось то, что после наклона поршня у одинаковых капель с одинаковым давлением стали разными объемы ячеек. Покажем это.

Мы знаем, что при повороте поршня индекс ячейки, примыкающей к нему, увеличился, но при этом у второй ячейки индекс почти не изменился, так что $Ih_1 > Ih_2$. Объемы пустот по формуле (4.10):

$$V_{h1} = \frac{1}{2} Ih_1 \frac{f^2}{p_1^2}$$

$$V_{h2} = \frac{1}{2} Ih_2 \frac{f^2}{p_2^2}$$

Отсюда при $p_1 = p_2$ имеем: $V_{h1} > V_{h2}$. Поскольку объем V капель одинаковый, то получаем, что объемы ячеек: $P_1 > P_2$. А так как при повороте поршня их суммарный объем не изменился, то оказалось, что при этом часть объема пустот из второй ячейки переместилась в первую.

Более очевидным оказалось другое свойство совместной деформации при наклоне поршня – площадь поверхности первой капли увеличилась больше, чем второй. Это значит, что первая капля приняла на себя большую часть энергии, затраченной на поворот поршня, как более деформированная.

Проведенный эксперимент, помимо прочего, показал, что если две капли находятся в контейнере с параллельными стенками, то у них не может быть разных давлений. Более наглядно это выявляется в контейнере круглого сечения, когда капли сжаты в цилиндре. В этом случае любое предположение о неравенстве давлений в соприкасающихся каплях приводит к противоречию. Рассмотрим его суть.

На рис.6.4 показаны сечения зоны контакта двух капель плоскостью, проходящей вдоль оси цилиндрического контейнера. Представлено два варианта - давление в капле 1 больше, чем в капле 2, и наоборот. Здесь кривая АВ изображает сечение поверхности контакта, а в точке А расходятся свободные поверхности капель (дуги АС и АД), которые касаются стенки контейнера соответственно в точках С и D. Как мы знаем, свободная поверхность, и поверхность контакта должны быть всегда сопряжены. В данном случае это выражается в том, что в точке А все три кривые имеют общую касательную $\Pi - \Pi$.

Предположим, что $p_1 > p_2$, и поверхность контакта выгнута вправо (рис.6.4 а). Но для того, чтобы выполнялось сопряжение поверхностей, должно быть $r_1 > r_2$, а это противоречит исходной предпосылке (там, где давление больше, радиус свободной поверхности должен быть меньше).

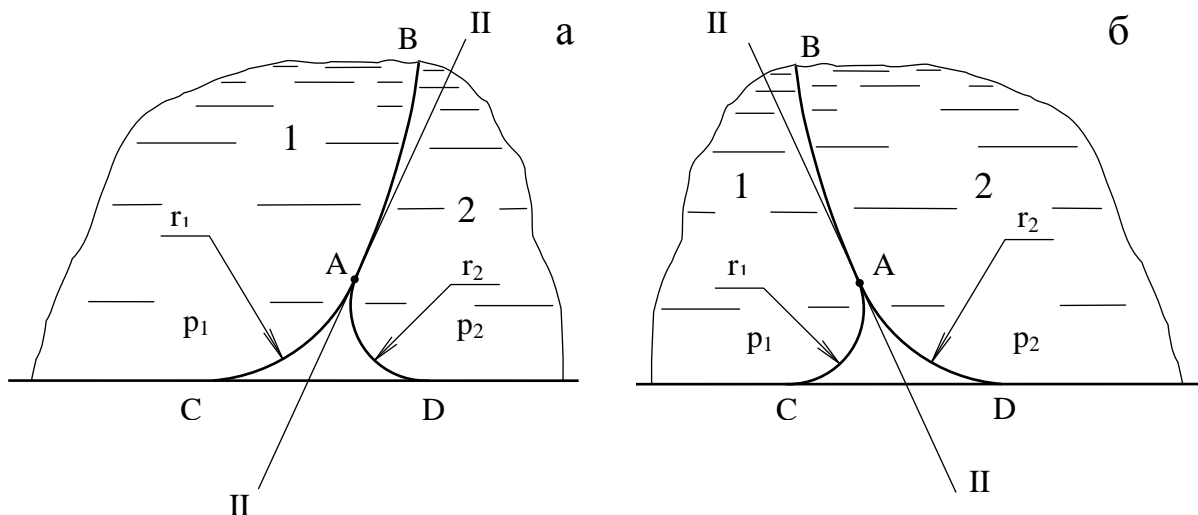


Рис. 6.4. Сопряжения поверхностей капель, содержащие противоречие.

Если предположить обратное, т.е. $p_1 < p_2$, то контактная поверхность должна быть прогнута в другую сторону – в каплю 1 (рис.6.4 б), а сопряжение будет возможным только при условии $r_1 < r_2$, что опять противоречит исходному предположению. Следовательно, здесь возможен единственный вариант – давления в каплях одинаковы. Только в этом случае контактная поверхность плоская, перпендикулярная боковой поверхности контейнера, а сопряжение выполняется при равенстве радиусов r_1 и r_2 .

И все-таки возможны условия, при которых давления в соприкасающихся каплях будут разными. Возьмем контейнер, у которого боковые стенки не параллельны, а сходятся под некоторым углом, образуя усеченную пирамиду с квадратными основаниями. Поместим в него две капли и сожмем их поршнем, как показано на рис.6.5. Сечение такой конструкции плоскостью, проходящей через ось контейнера, изображено на рис.6.6.

Если предположить, что давления в каплях одинаковы, а поверхность контакта – плоская, перпендикулярная оси контейнера, то радиусы свободной поверхности капель r_1 и r_2 должны быть разными, что противоречит предположению о равенстве давлений.

Если же выполнить построение, в котором радиусы r_1 и r_2 сделать одинаковыми, тогда поверхность контакта должна быть выгнутой влево, что опять не согласуется с равенством радиусов, т.е. с равенством давлений. По всей видимости, поверхность контакта действительно прогнута влево, но не настолько, чтобы выровнять радиусы свободных поверхностей, а так, чтобы при соотношении давлений $p_1 < p_2$ сохранялось правильное соотношение $r_1 > r_2$.

Найдем, от чего зависит отношение этих давлений. На рисунке 6.6 показаны радиусы кривизны r_1 и r_2 свободных поверхностей капель и радиус r_k сечения поверхности контакта. Принимаем, как обычно, что свободные поверхности капель в месте сечения имеют цилиндрическую форму, а поверхность контакта - сферическая. Влиянием сферичности поверхности контакта на изгиб цилиндрических участков свободной поверхности пренебрегаем.

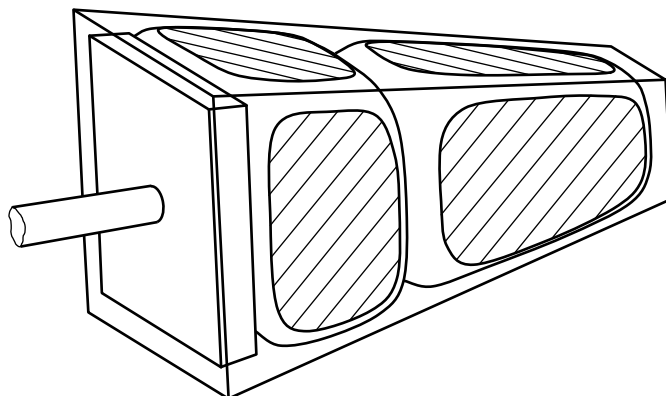


Рис. 6.5. Деформация капель в контейнере с непараллельными стенками.

Угол между сходящимися стенками контейнера обозначим β . Для решения этой задачи будем полагать, что размер a контейнера в месте контакта капель, а так же один из радиусов, например r_1 , известны (в конечном решении достаточно знать их отношение). Из построений на рис.6.6 видно, что прямая, проходящая через центры O_1 и O_2 дуг – сечений свободных поверхностей - составляет с осью контейнера угол φ . Точка пересечения O_k (на рисунке не показана) этой прямой с осью контейнера является центром дуги радиуса r_k – сечения поверхности контакта. Через точку O_2 проведем отрезок KO_2 , параллельно нижней стенке контейнера.

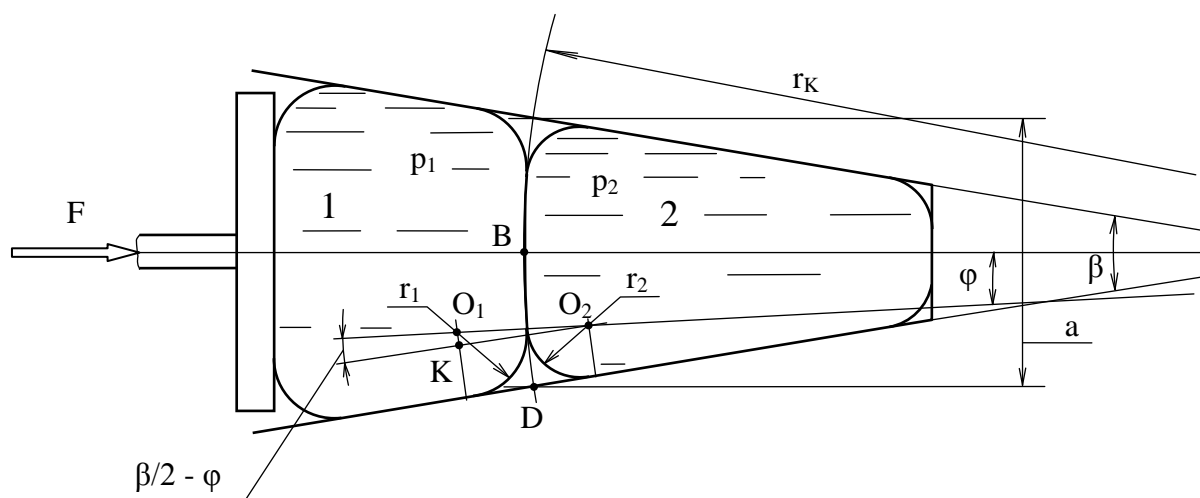


Рис. 6.6. Сечение контейнера с непараллельными стенками.

Из прямоугольного треугольника KO_1O_2 имеем:

$$r_1 - r_2 = (r_1 + r_2) \sin\left(\frac{\beta}{2} - \varphi\right),$$

откуда:
$$\varphi = \frac{\beta}{2} - \arcsin \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \quad (6.3)$$

Рассмотрим треугольник BDO_K (напомним, точка O_K – центр кривизны поверхности контакта – в поле чертежа не попала). Для него приближенно можно записать:

$$\frac{a}{2} - r_1 \approx r_K \sin \varphi$$

Отсюда выразим r_K :

$$r_K \approx \frac{a - 2r_1}{2 \sin \varphi} \quad (6.4)$$

Из формулы (2.8) получим соотношение радиусов r_1 , r_2 и радиуса r_K сечения контактной поверхности. Поскольку поверхность контакта принята сферической, ее радиусы сечений в двух взаимно-перпендикулярных направлениях одинаковы. Подставив в формулу (2.8) эти радиусы, а так же выражения давлений $p_1 = \frac{f}{r_1}$ и $p_2 = \frac{f}{r_2}$, после преобразований находим:

$$r_K = \frac{4r_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad (6.5)$$

Приравняв выражения (6.4) и (6.5), а вместо угла φ подставив его выражение (6.3), после преобразований получим уравнение:

$$(a - 2r_1) \left/ \sin\left(\frac{\beta}{2} - \arcsin \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right) \right. - \frac{8r_1 r_2}{r_1 - r_2} = 0$$

Решение этого уравнения относительно r_2 имеет очень громоздкий вид и здесь не приводится. Поскольку нас изначально интересует не абсолютное значение этой величины, а отношение давлений $\frac{p_2}{p_1} = \frac{r_1}{r_2}$, то используем это решение для построения зависимости отношения p_2/p_1 от угла β контейнера. График этой зависимости изображен на рис.6.7 для трех значений отношения r_1/a . Как видим, давление во второй капле всегда больше, чем в первой, а отношение давлений зависит почти линейно от угла β схождения стенок контейнера. Таким образом, мы установили, что соотношение давлений капель, находящихся в контакте, определяется только геометрическими условиями их совместного окружения.

Почему же у двух капель, находящихся в одной полости, оказались разными давления? Предположим, что капли разделены тонкой плоской перегородкой, которая не позволяет прогибаться их контактными поверхностям – как показано на рис.6.8. Найдем индексы ячеек, приняв их объемы одинаковыми. Как видим, обе ячейки представляют собой усеченные пирамиды высотой H_1 и H_2 . Зная размер a контейнера в месте контакта капель и угол схождения боковых стенок β , выразим размеры a_1 и a_2 оснований ячеек:

$$a_1 = a + 2H_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

$$a_2 = a - 2H_2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Объемы ячеек:

$$P_1 = \frac{H_1}{3} (a_1^2 + a_1 a + a^2)$$

$$P_2 = \frac{H_2}{3} (a^2 + a a_2 + a_2^2)$$

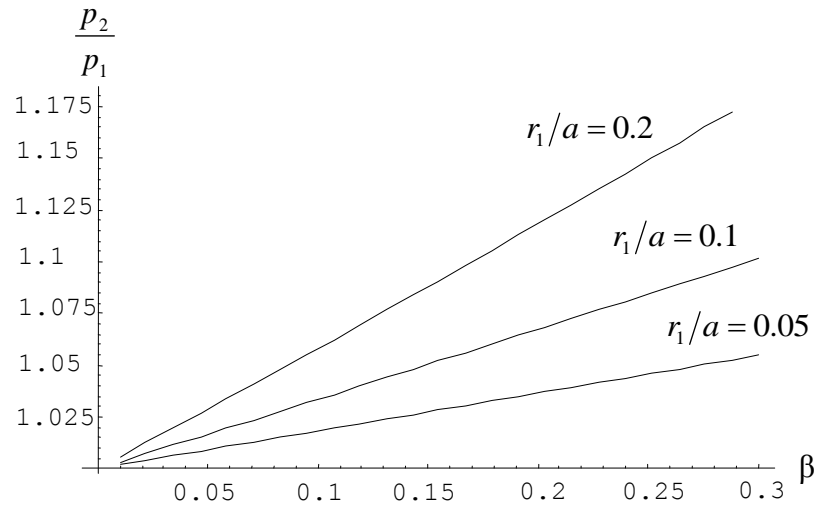


Рис.6.7. Графики зависимости отношения давлений в смежных каплях от угла схождения стенок контейнера для различных значений r_1/a .

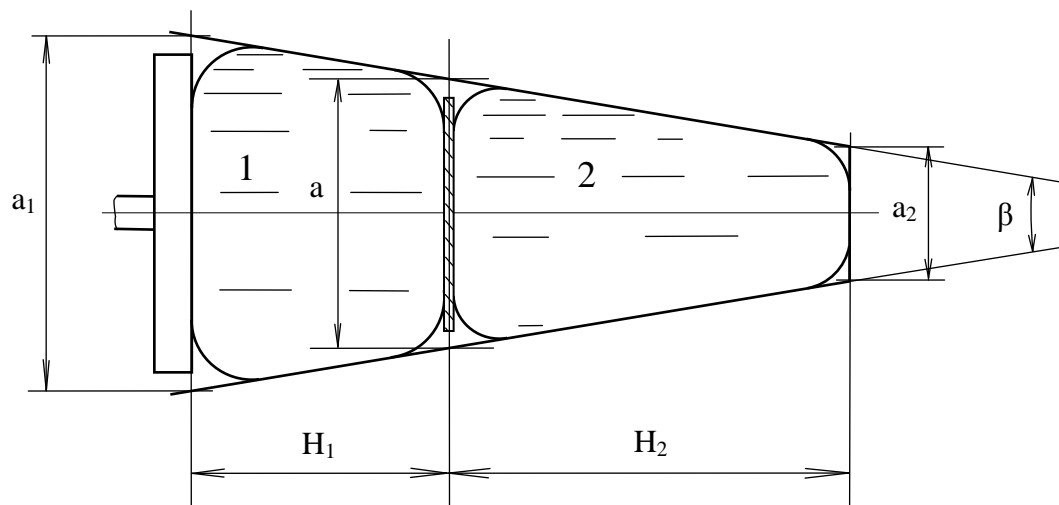


Рис. 6.8. Капли, разделенные пластиной.

Примем, что размер H_1 задан, тогда, приравняв объемы P_1 и P_2 , и подставив ранее записанные выражения a_1 и a_2 , получим кубическое уравнение относительно размера H_2 . Действительное решение этого уравнения имеет вид:

$$H_2 = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} \left(a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\beta}{2} - 6 a^2 H_1 \operatorname{tg}^4 \frac{\beta}{2} - 12 a H_1^2 \operatorname{tg}^5 \frac{\beta}{2} - 8 H_1^3 \operatorname{tg}^6 \frac{\beta}{2} \right)^{1/3} \quad (6.6)$$

Далее осталось выразить индексы ячеек по формуле (4.8):

$$\begin{aligned} I_{h_1} &= 4(a_1 + 3r_0) \left(2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi - \beta}{4} \right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) + 4(a + 3r_0) \left(2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi + \beta}{4} \right) - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + \\ &\quad 4 \left(\frac{H_1}{\cos \beta/2} + 3r_0 \right) \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \\ I_{h_2} &= 4(a + 3r_0) \left(2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi - \beta}{4} \right) - \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) + 4(a_2 + 3r_0) \left(2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi + \beta}{4} \right) - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \right) + \\ &\quad 4 \left(\frac{H_2}{\cos \beta/2} + 3r_0 \right) \left(2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Чтобы второе выражение зависело только от заданных параметров, необходимо в него вместо H_2 подставить выражение (6.6). После этого мы получаем возможность сравнить индексы ячеек обеих капель.

Очевидно, что анализировать эти выражения сложно, поэтому представим их графически в виде зависимости отношения индексов I_{h_2} / I_{h_1} от угла β для некоторых значений r_0/a – аналогично предыдущему графику. Заметим, что под величиной радиуса r_0 , участвующего в выражениях индексов, подразумевается некоторое среднее значение радиусов свободной поверхности капель, а точное значение его не играет существенной роли.

На рисунке 6.9 представлены искомые зависимости для одного значения отношения $H_1/a = 1$. Как видим, при наличии угла β между боковыми стенками индекс второй ячейки всегда больше чем первой. Это означает, что давление в правой капле больше, но только при условии, что объем правой ячейки не превышает объем левой.

Проверить выполнение этого условия несложно - необходимо найти отношение объемов пустот в ячейках. Чтобы не загромождать изложение, мы не будем приводить это вычисление, а только кратко опишем его алгоритм. Он состоит в следующем. Через размер a , угол β , и радиусы r_1 и r_2 свободных поверхностей капель выражаем площади поверхностей контакта пластины с обеими каплями. Имея в виду, что пластина, разделяющая капли, находится в равновесии, приравниваем произведение площади левой поверхности контакта на давление в левой капле такому же произведению для правой капли. Из этого уравнения выражаем отношение давлений p_2/p_1 . Через это отношение, а так же используя полученные выше выражения индексов ячеек, приходим к отношению объемов пустот при помощи формулы (4.10).

Поскольку объемы самих капель одинаковы, отношения объемов пустот вполне достаточно, чтобы сделать заключение о соотношении объемов ячеек. Расчеты, выполненные по этому алгоритму, подтверждают, что объем второй ячейки никогда не превышает объема первой. Таким образом, можно утверждать, что при наличии разделяющей пластины давление в правой капле больше, чем в левой.

Теперь уберем пластину, разделяющую капли на рис.6.8. Чтобы проследить за изменениями, какие за этим последуют, примем, что эти изменения происходят крайне медленно. Итак, в первое мгновение после изъятия пластины поверхность контакта останется плоской, а давления в каплях - разными. Эта первоначальная разность давлений начнет прогибать поверхность контакта влево. Но как только общая поверхность капель прогнется, изменятся конфигурации обеих ячеек, а это приведет к изменению их индексов - в левой ячейке поверхность контакта станет вогнутой, а двугранные углы, окаймляющие эту грань, уменьшатся, поэтому индекс этой ячейки вырастет. В правой ячейке - наоборот, контактная поверхность станет выпуклой, двугранные углы на этой стороне ячейки увеличатся, а ее индекс уменьшится.

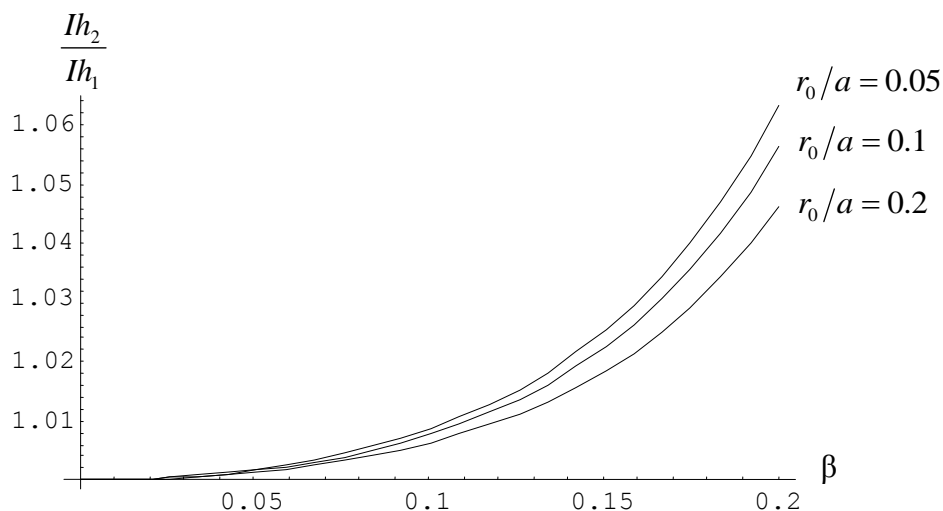


Рис.6.9. Графики зависимости отношения индексов смежных ячеек от угла схождения стенок контейнера для различных значений r_0/a .

Такое взаимное изменение индексов ячеек приводит к уменьшению первоначальной разности давлений, возникает своего рода обратная связь - с прогибом поверхности контакта уменьшается разность давлений, его вызывающая. В итоге наступает состояние равновесия, когда прогиб устанавливается таким, при котором величина индексов ячеек создает разность давлений, поддерживающую этот прогиб - состояние, изображенное на рис.6.6.

В этом примере с непараллельными стенками контейнера у капель, находящихся в контакте, оказались разными внутренними давлениями, что вызвало прогиб их общей поверхности. Пример этот принципиально отличается от всех предыдущих тем, что здесь капли не ограничены только плоскими поверхностями, поэтому ячейки у них не являются обычными многогранниками с плоскими гранями. Более того, ячейка 1 на рис.6.6 не является выпуклым телом - касательная плоскость, проведенная, например, через точку В, рассечет его. Поэтому в определение ячейки, данное в разделе 3, необходимо внести следующее изменение: ячейка - это часть пространства, внутри которого находится сжатая капля, ограниченная продолжением поверхностей контакта за их границы.

Вычисление индекса ячейки по формуле (4.8) в этом случае требует учета искривления формы многогранника. Самая главная особенность здесь - величина двугранного угла будет изменяться по длине ребра, поэтому в тех слагаемых, где это имеет место, следует применить интегрирование. Однако, при тех допущениях, которые делались при выводе

формулы (4.8), такое усложнение может быть излишним, а достаточно найти только среднее значение двугранного угла на ребре.

Кроме этого, следует учитывать, что искривление граней ячейки увеличивает площадь ее поверхности. Эти особенности, связанные с прогибом граней, будут играть важную роль в дальнейшем, поэтому к ним мы еще вернемся.

Совместная деформация капель влияет на объем их ячеек. Когда одна капля полностью деформируется контейнером, объем ячейки задается напрямую, и является внешним параметром, от которого зависит давление в капле. При совместной деформации капель только суммарный объем их ячеек устанавливается контейнером, но распределение его между самими ячейками происходит самопроизвольно. Главной особенностью здесь является то, что когда у капель разные давления, объем их ячеек зависит от этих давлений, и зависит довольно неожиданно – чем больше давление в капле, тем меньше объем ее ячейки, и наоборот.

Причину этого явления можно наблюдать, обратившись вновь к рисунку 6.8. В изображенном состоянии объем правой ячейки, как мы отмечали, не больше, чем в левой. Когда после изъятия пластины поверхность контакта прогнется влево, двугранные углы, смежные с этой поверхностью, у правой ячейки увеличатся, а у левой – уменьшатся. Но при увеличении двугранного угла объем пустого пространства, куда не проникла жидкость, сокращается (рис.4.2), поэтому объем пустот у правой ячейки станет меньше. У левой ячейки – напротив, уменьшение двугранных углов вызовет увеличение объема пустот. Поскольку объем самих капель одинаковый, прибавление к нему большего объема пустот даст больший объем ячейки.

Изложение в этом разделе следует одному направлению – мы постепенно освобождаем каплю от навязываемых ей извне условий жестких стенок, и создаем ей более естественные условия окружения. Поэтому следующим шагом будет рассмотрение деформации капли, полностью окруженной такими же каплями жидкости.

Известно, что один шар может быть окружен двенадцатью шарами того же размера, и каждый из окружающих шаров одновременно будет касаться и центрального, и четырех ближайших своих «соседей». Расположим вокруг одной сферической капли 12 таких же тел и радиально сожмем их толкателями. В этом случае центральная капля не касается никаких жестких поверхностей, а сжимается только посредством таких же капель. Рассечем эту конструкцию плоскостью симметрии, проходящей через середины центральной и шести окружающих капель. Это сечение изображено на рис.6.10.

Как видим, все периферийные капли расположены симметрично и находятся в одинаковых условиях, поэтому следует ожидать, что давления в них одинаковы, а поверхности контакта между ними плоские. В данном случае известно, что все изображенные поверхности контакта перпендикулярны плоскости сечения. Встает вопрос – каково соотношение давлений в центральной и периферийных каплях? Для ответа на него рассмотрим сопряжение поверхностей в зоне III, выделенной на рисунке 6.10. Это место контакта центральной капли 1 и двух периферийных 2 и 3 показано на рис.6.11. В данном случае сопряжение выполняется только при равенстве радиусов свободной поверхности всех трех капель, т.е. при равенстве давлений в них. Если же подобное построение выполнить в предположении, что давление в центральной капле отличается от давления в периферийных, то это приведет к противоречию (эти построения мы не приводим).

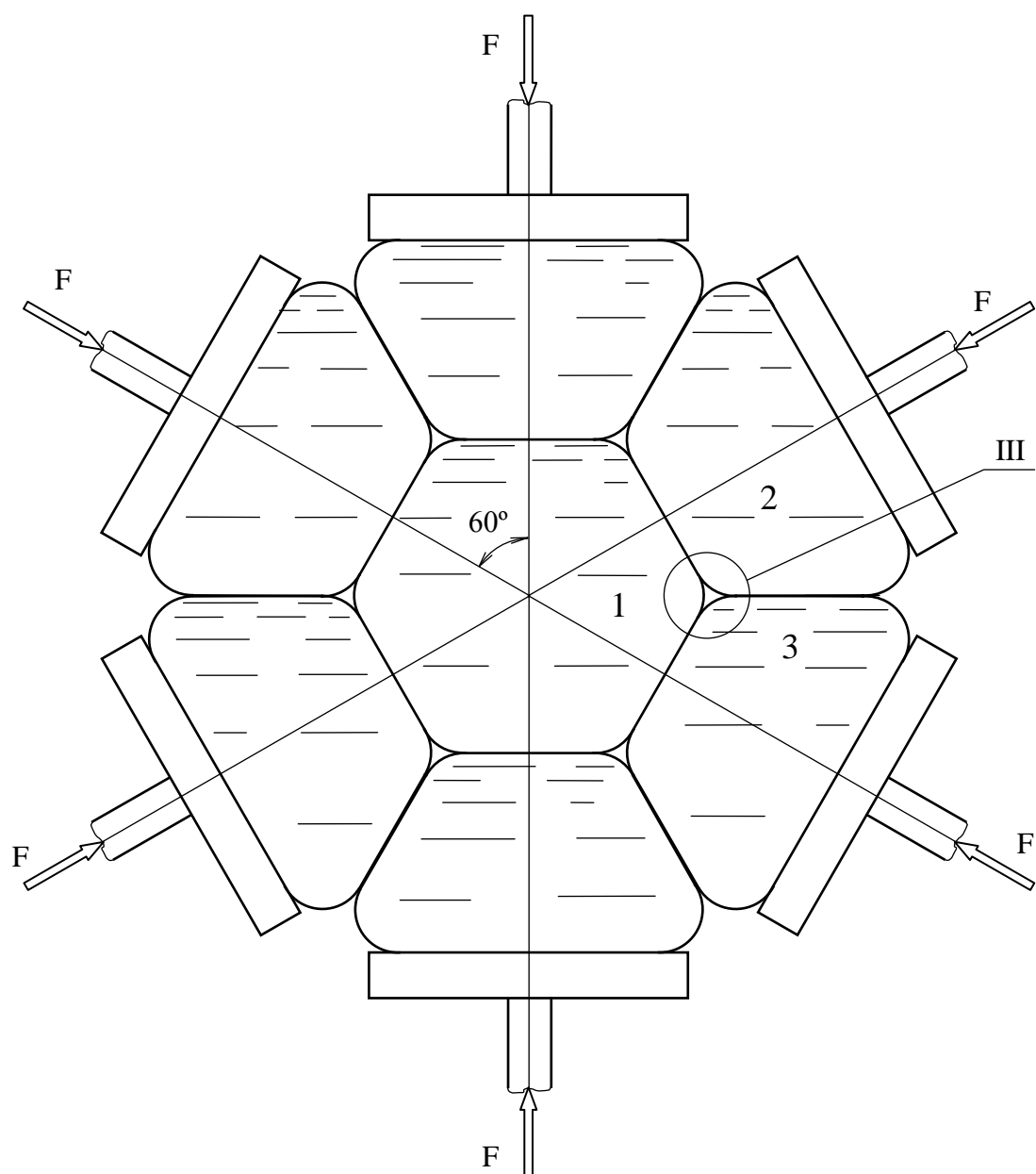


Рис. 6.10. Сжатие центральной капли окружающими каплями.

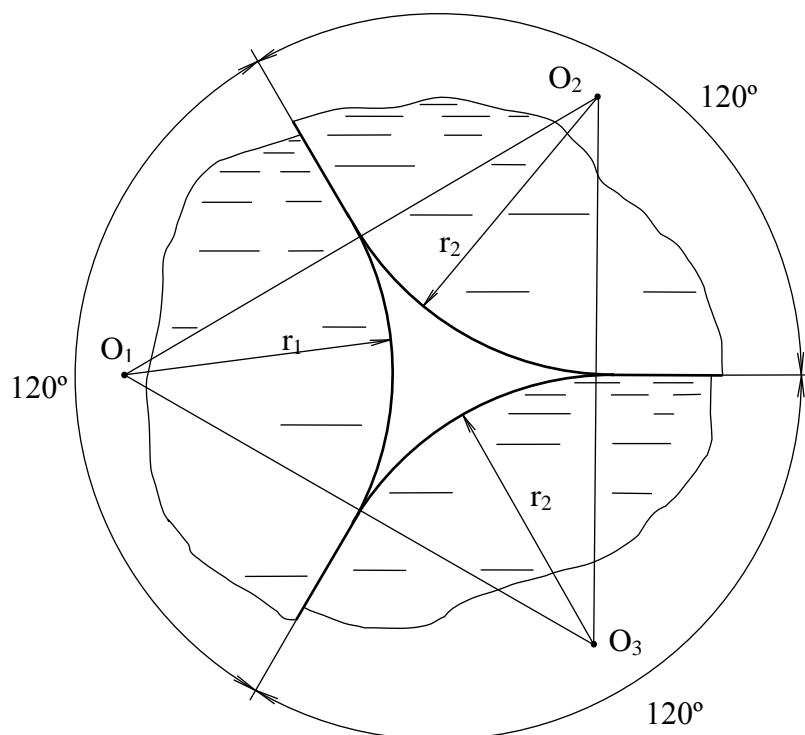


Рис. 6.11. Сопряжение поверхностей трех капель.

Следует отметить, что показанное в этом примере равенство давлений в центральной и в периферийных каплях, имеет место только в том случае, когда вокруг центральной капли расположено ровно 12 таких же. Если число окружающих капель взять другим, то этого равенства давлений не будет. В следующих разделах мы увидим, почему именно такое расположение капель заслужило отдельного рассмотрения.

Глава 2

Регулярная система сжатых капель

7. Плотная упаковка шаров

Знакомясь в разделе 1 с процессом образования системы сжатых капель, мы отметили, что он обязательно включает в себя стадию плотной упаковки шаров, каковыми являются еще не деформированные капли жидкости.

Когда множество шаров находится в условиях всестороннего сжатия, на каждый из них действуют контактные силы от соседних тел. Пока шар не окажется в равновесии под действием этих сил, он будет перемещаться среди других и искать устойчивое положение. В результате этих перемещений все множество придет к минимуму потенциальной энергии и достигнет такого взаимного расположения шаров, при котором все они будут занимать наименьший объем – наступит состояние плотной упаковки.

Задача нахождения наиболее плотной упаковки произвольного количества одинаковых шаров имеет давнюю историю. Еще в 1611 году ею занялся знаменитый Иоганн Кеплер^{*}. Вопрос о плотной укладке шаров перед ним поставил его современник Томас Хэрриот в связи с поиском оптимальной укладки пушечных ядер на военных кораблях.

Кеплер установил, что принципиально разных вариантов плотной укладки шаров совсем немного – всего три, выбрать из которых наиболее плотную несложно, что он и сделал. Но то, что выбранная им упаковка является наиболее плотной вообще из всех возможных, было тогда только гипотезой (она так и называлась – гипотеза Кеплера). Доказать ее истинность пробовали многие математики, но в конце концов дать «машинное» доказательство этой гипотезы удалось в 1998 году. Сделал это американский математик Томас Хэйлс (Thomas Hales) [7] исключительно благодаря использованию мощного компьютера и современных математических методов – арифметики интервалов, комбинаторики, линейного программирования, методов ветвей и границ и др.

Несколько слов о «машинном» способе доказательства. Как известно, такой способ доказательства теорем заключается в непосредственной проверке справедливости доказываемого утверждения для частных случаев, перебираемых компьютерной программой в большом числе. Чем больше частных случаев будет проверено без единого нарушения, тем больше оснований считать, что это утверждение справедливо всегда. Однако, даже перебрав удачно многие миллионы частных случаев, мы не можем гарантировать, что не существует варианта, на котором это утверждение «не работает». Если же говорить о классических «прямом» и «от противного» способах доказательства, то в них доказываемое следует логически, и не допускает исключений. Поэтому «машинное» доказательство не является доказательством в строгом смысле этого слова, и не всеми математиками принимается, хотя в таких сложных случаях, как наш, классические методы вряд ли возможны.

Оставив в стороне теоретическую сторону этой проблемы, попробуем описать, как она выглядит, эта плотнейшая укладка шаров, столько лет занимавшая умы математиков. Представим себе плоскую горизонтальную поверхность, например, стол, и высыпанные на него одинаковые шары. Если сдвинуть их вместе, то они займут положение, изображенное на рис.7.1. Оставаясь лежащими на плоскости, они не могут сдвинуться плотнее – это очевидно. Так мы получили первый слой нашей укладки. Чтобы плотно уложить на него второй слой, сначала нужно сверху положить один шар – он сам займет свое место в любой лунке между тремя шарами первого слоя. Затем, прикладывая к нему другие шары, получим второй слой, похожий на первый. Третий слой начинается так же – сверху кладется один шар, он скатывается в любую лунку, а к нему прикладываются остальные.

^{*} (1571 - 1630) – немецкий астроном и математик. Наиболее известен открытием законов движения планет.

Так можно уложить сколь угодно много слоев и такая укладка всегда будет самая плотная – коэффициент упаковки ее равен:

$$k = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.74048,$$

то есть объем самих шаров составляет 74.05 % общего объема укладки, а каждый внутренний шар касается 12 соседних.

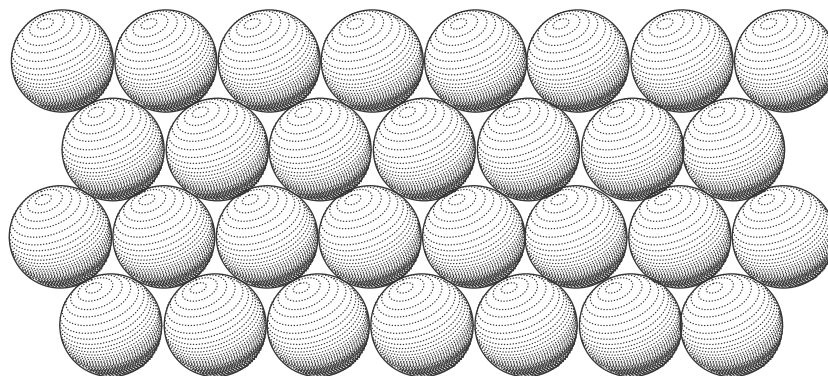


Рис. 7.1. Плотная однослойная укладка шаров.

На первый взгляд все кажется очень просто, но это не так. Если повторять несколько раз с самого начала описанный процесс укладки, то почти всегда результат будет разным, хотя коэффициент упаковки получится один и тот же. Такая неоднозначность начинается с третьего слоя. А дело вот в чем. Уложим два слоя, как было описано выше, и посмотрим на верхний слой – сам он ничем не отличается от первого, только немного сдвинут, а под ним лежат шары первого слоя – на рис.7.2 они показаны пунктирными линиями.

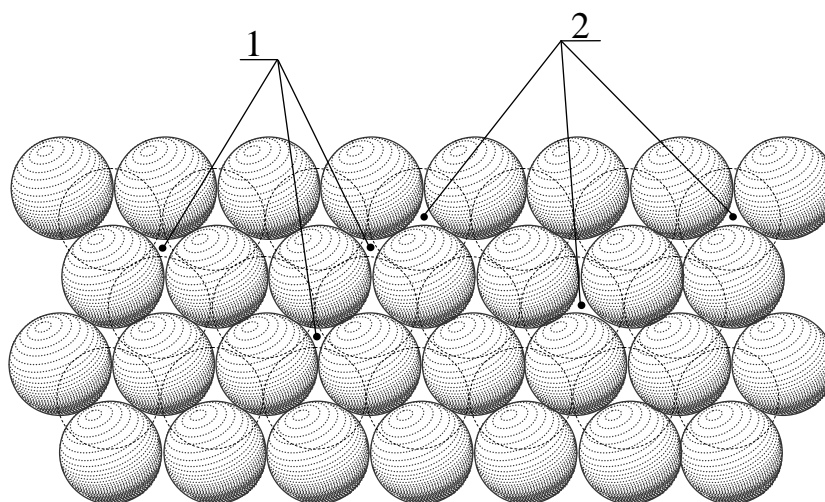


Рис.7.2. Шары второго слоя, а под ними – шары первого слоя.

Теперь, если начать укладывать третий слой и произвольно положить его первый шар, то он может попасть в лунку, под которой нет шара первого слоя (лунка 1 на рисунке (7.2)), а

может оказаться в лунке, под которой лежит шар (лунка 2). Получается, что лунки второго слоя разные, и от того, в какую попадет первый шар третьего слоя, зависит вся дальнейшая укладка. У четвертого слоя – опять два варианта, и чем больше слоев мы уложим, тем больше разных вариантов может получиться. Но нас интересует только один вариант укладки, а именно – шары третьего слоя должны всегда лежать в лунках, под которыми нет шаров первого слоя (лунки 1 на рис.7.2), шары четвертого слоя – в лунках, под которыми нет шаров второго слоя и т.д. Такой вариант укладки – единственный.

Но зачем, спросите вы, такие замысловатые условия, если у всех описанных вариантов одинаковая плотность укладки? А дело здесь в том, что это единственная плотная укладка шаров, которая обладает *кубической пространственной группой симметрии* (в дальнейшем будем просто называть ее *кубической симметрией*). И этот факт имеет для нас определенное значение, о чем будет сказано ниже.

Кубическая группа симметрии – это совокупность всех элементов симметрии, которыми обладает куб – все они показаны на рис. 7.3. Перечислим их – это три оси 4-го порядка (рис.7.3 а) - вращаясь вокруг одной такой оси, куб четыре раза за оборот совместится сам с собой. Затем на рис. 7.3 б изображены четыре оси 3-го порядка – один оборот вокруг любой из них даст 3 совмещения. Далее (рис.7.3 в) показаны шесть осей 2-го порядка, проходящие через центр куба и середины противоположных ребер. Следующими идут плоскости симметрии – три из них параллельны граням куба (рис.7.3 г, д, е), а шесть проходят через каждую пару наиболее разнесенных параллельных ребер (рис.7.3 ж, з, и). И, наконец, последний элемент – центр симметрии – точка, расположенная строго в центре куба, в которой пересекаются все эти оси и плоскости.

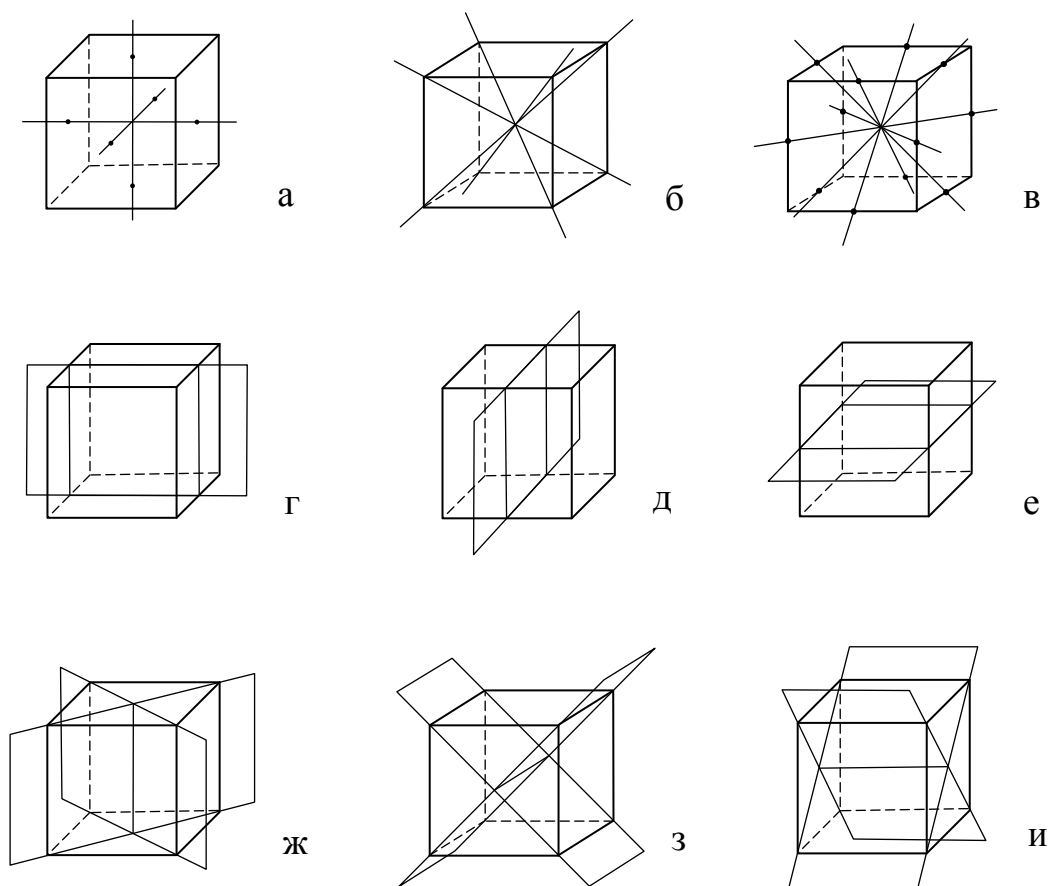


Рис. 7.3. Элементы кубической симметрии.

Несмотря на то, что вся эта совокупность осей и плоскостей называется кубической симметрией, помимо куба ею обладают и другие многогранники – некоторые из них мы еще встретим.

Если говорить об отдельном теле, то данная симметрия не является самой совершенной – есть одна форма, у которой имеется бесчисленное множество элементов симметрии – это шар, но кубическая симметрия – наивысшая, которой может обладать какая-либо регулярная структура в трехмерном пространстве. Вот такой наивысшей пространственной группой симметрии наделена и наша укладка шаров, в отличие от других вариантов, которые такой симметрией не обладают. Поэтому эта единственная укладка называется *плотной кубической упаковкой*. Это означает, что шары в ней уложены так, что через центр любого шара, находящегося внутри, проходят те же оси и плоскости симметрии, что и у куба, но относящиеся к расположению окружающих его шаров.

Выше был описан процесс построения плотных упаковок, который мог приводить к различным вариантам, из которых нас интересует только один. Но есть другой способ, который сразу приводит к кубической упаковке. Вот этот способ – уложим шары на плоскость рядами в виде квадрата – как показано на рис.7.4. Если на первый слой произвольно положить первый шар второго слоя, то он сам займет свое место в лунке между четырьмя шарами первого слоя. Затем полностью уложим второй слой. Теперь, когда начнем укладывать третий слой, различных вариантов уже не будет – все лунки второго слоя одинаковы. Таким образом, продолжая до конца, мы неизменно придем к пирамиде из шаров, например такой, которая изображена на рис.7.5. Это и есть плотная кубическая упаковка, но только повернутая в пространстве относительно укладки, какую мы делали раньше.

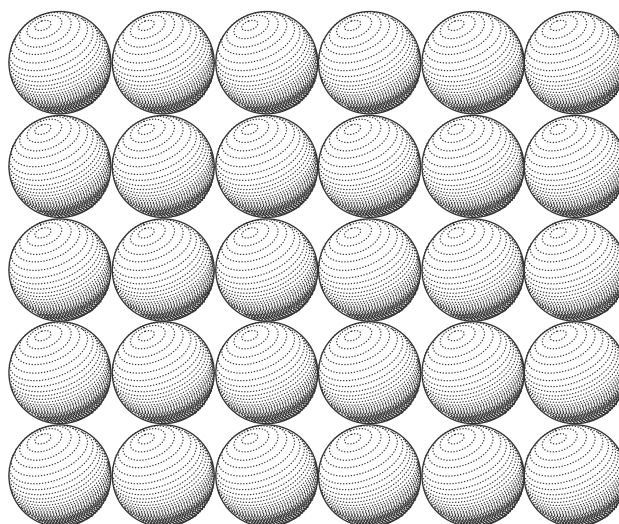


Рис.7.4. Укладка шаров первого слоя, однозначно приводящая к плотной кубической упаковке.

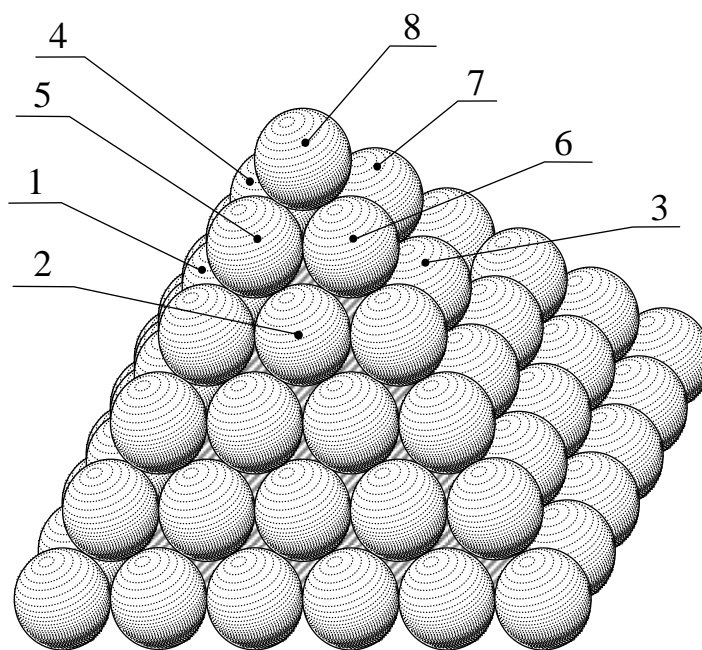


Рис.7.5. Плотная кубическая упаковка шаров

Посмотрим на шары, образующие наклонную грань пирамиды на рис.7.5 – именно такой слой лежал раньше на столе, когда мы укладывали первым способом. А шары третьего от него слоя расположены именно так, как нужно – в лунках второго слоя, под которыми нет шаров первого. В данном случае все получилось естественно и однозначно.

Мы утверждаем, что точно в такую плотную кубическую структуру уложатся одинаковые сферические капли жидкости нашей системы под действием всестороннего равномерного сжатия. А почему это произойдет, мы узнаем в 9 разделе. Сейчас же займемся другим вопросом.

С упаковкой шаров тесно связано понятие *ячейки Дирихле – Вороного*.^{*} Если говорить коротко и точно, то такая ячейка для каждого шара – это часть пространства, все точки которой отстоят от центра данного шара не дальше, чем от центра любого другого. Эта математически безукоризненная формулировка дает слабое образное представление, какую форму она описывает. Построить же эту ячейку очень просто – возьмем в упаковке любой шар, отметим на нем точки, которыми он касается соседних шаров, и проведем через эти точки касательные плоскости. Плоскости вырежут из пространства некий многогранник, внутри которого окажется наш шар – этот многогранник и есть его ячейка Дирихле – Вороного в данной упаковке. Теперь, если взять любую точку внутри полученного многогранника, то она окажется ближе к центру «своего» шара, чем к центру любого соседнего (а тем более – других, более удаленных шаров). Каждая точка, лежащая на поверхности этого многогранника, равно удалена как от центра «своего» шара, так и от центра ближайшего соседнего. Но ни одна точка этого многогранника не лежит ближе к другому центру, чем к «своему», а это и утверждает точная математическая формулировка.

^{*} Лежен – Дирихле Петер Густав (1805 - 1859) – немецкий математик – изучая свойства квадратичных форм в двумерном пространстве, ввел понятие рассматриваемой ячейки на плоскости.

Вороной Георгий Феодосьевич (1868 - 1908) – российский математик – так же работал над теорией квадратичных форм. Связанное с этим понятие ячейки Дирихле развил на трехмерное и четырехмерное пространства.

Понятие ячейки Дирихле – Вороного не обязательно связано с упаковкой тел. В более широком смысле, эта ячейка выделяет область пространства, «приписанного» к каждой точке некоторого множества точек. Так, взяв любое множество произвольно расположенных точек, можно разбить пространство на ячейки Дирихле – Вороного. Для этого каждая пара соседних точек соединяется отрезком, и через его середину проводится плоскость, перпендикулярная этому отрезку. Совокупность таких плоскостей, окружающих любую точку, ограничивает некоторый многогранник, который и является искомой областью для нее.

Если точки взятого множества расположены нерегулярно, произвольно, хаотически, то и полученные области будут разными по форме и размерам многогранниками. Если же эти точки расположены в правильном регулярном порядке, который одинаково повторяется во всех направлениях, образуя так называемую *решетку*, то области Дирихле – Вороного, построенные для них, будут одинаковыми и одинаково направленными многогранниками.

В нашей плотной кубической упаковке центры шаров лежат в правильном порядке, образуя *кубическую гранецентрированную решетку*, поэтому все области Дирихле – Вороного здесь будут одинаковыми. Как выглядит такое взаимное расположение точек, которое называется кубической гранецентрированной решеткой, показано на рис.7.6 – здесь линии проведены условно для того, чтобы выявить взаимное положение точек в пространстве – одни из них расположены как бы в вершинах куба, а другие – в серединах его граней. И такая структура повторяется во всех направлениях неограниченно. На рис.7.5 цифрами обозначены шары, а на рис.7.6 те же обозначения имеют точки, которые можно поставить в соответствие центрам этих шаров.

Отметим, что те произвольные укладки шаров, которые мы делали в начале этого раздела и которые, хотя и были плотными, но не были нужной нам кубической укладкой, решетки не образуют. В решетке все точки подчинены одному порядку расположения, повторяющемуся во всех направлениях, а если некоторые из них (или даже одна) лежат по-другому, в целом это не является решеткой.

Вполне очевидно, что если одинаково уменьшить диаметры шаров в плотной кубической упаковке, то ни тип решетки, образованной их центрами, ни форма областей Дирихле – Вороного не изменятся. Уменьшатся только расстояния между центрами шаров, то есть сдвинутся ближе друг к другу точки решетки, не меняя своего взаимного расположения.

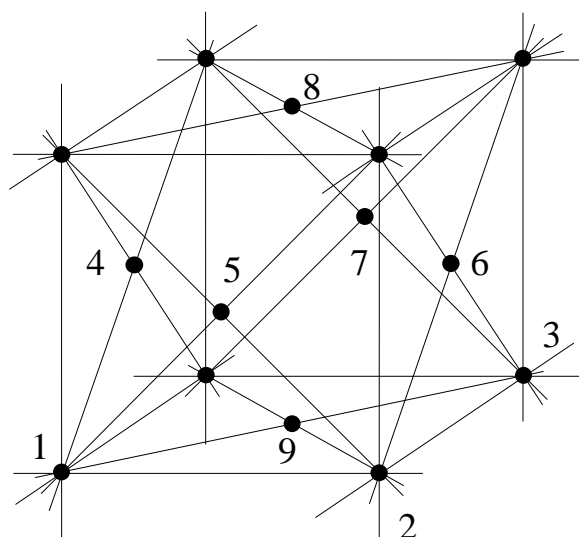


Рис.7.6. Расположение точек, образующих кубическую гранецентрированную решетку.

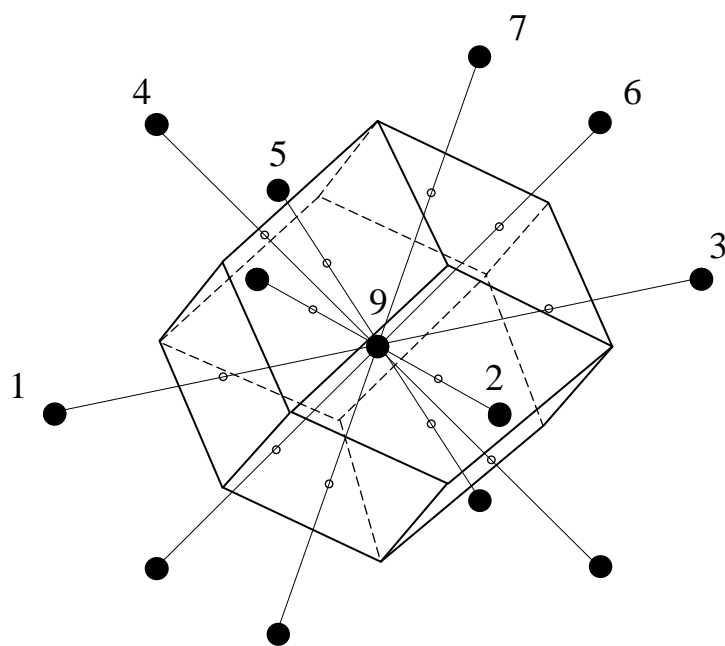


Рис.7.7. Ячейка Дирихле-Вороноя, построенная для одной точки кубической гранецентрированной решетки.

Точно такой же результат будет и в том случае, если не уменьшать диаметры жестких шаров, а, заменив их каплями жидкости, сдавливать их множество равномерно со всех сторон. Жидкие капли начнут деформироваться, а центры их объемов – сближаться. При

этом форма каждой капли будет приближаться к форме ячейки Дирихле – Вороного, как будто каждая из них находится внутри контейнера, равномерно сжимающего ее своими стенками. Здесь ячейка сжатой капли, введенная нами ранее, полностью совпадает с ячейкой Дирихле – Вороного, построенной для центра объема капли.

Выше, говоря о ячейках Дирихле – Вороного, мы обходили вопрос, что же это за многогранник, форму которого имеет ячейка в плотной кубической упаковке шаров, и к которой стремится сжатая в системе капли. Построим этот многогранник для одной точки кубической гранецентрированной решетки, проведя плоскости посередине между каждой парой соседних точек, как описано выше. Это построение дано на рис. 7.7 – здесь цифрами обозначены те же точки, что и на рис.7.6, а маленькие кружки на прямых показывают место, где прямая пересекает соответствующую грань. Как видим, получился некий симметричный многогранник – он настолько важен для нас, что его описанию будет посвящен весь следующий раздел. Называется он *ромбододекаэдр*.

8. Ромбододекаэдр

В начале этой книги на рисунке 1.2 изображена деформированная капля, взятая из регулярной зоны системы. Мы установили, что сжатая со всех сторон, она приняла форму ромбододекаэдра. Но правильнее было бы назвать эту форму *скругленным ромбододекаэдром*, поскольку она отличается от геометрического многогранника своими скругленными ребрами и вершинами – оставшейся свободной поверхностью жидкости. Сначала рассмотрим настоящий, геометрический многогранник – он изображен на рис. 8.1, а подробный чертеж его дан на рис. 8.2.

Ромбододекаэдр (ромбический додекаэдр) – это выпуклый двенадцатигранник, все грани которого – одинаковые ромбы. Он относится к равногранно – полуправильным многогранникам, и имеет два вида вершин. Те его вершины, в которых сходятся четыре ребра, будем называть *острыми* (на вид они действительно кажутся острее, чем вершины другого типа), а вершины, соединяющие три ребра, назовем *тупыми*. Таким образом, у этого многогранника шесть острых и восемь тупых вершин.

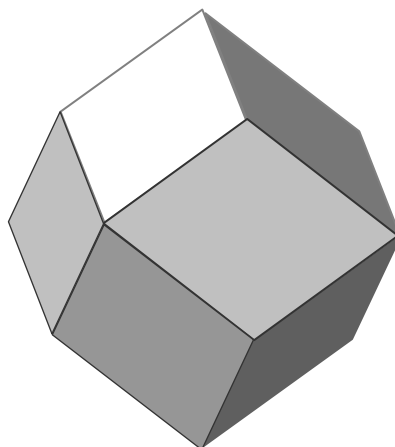


Рис.8.1. Ромбододекаэдр

Если через каждую пару противоположных острых вершин провести прямые, то они будут взаимно-ортогональны, как оси прямоугольных декартовых координат в пространстве.

Любая грань ромбододекаэдра имеет вторую – параллельную ей, так что здесь мы имеем шесть пар взаимно параллельных граней.

Ромбододекаэдр имеет 24 ребра, которые разбиваются на 4 семейства параллельных между собой ребер по 6 в каждом.

Интересны проекции этого многогранника на плоскость – если посмотреть на него со стороны любой из острых вершин, то его контуры примут форму квадрата (рис. 8.2, Вид А). Если же взглянуть на него со стороны тупой вершины, то это будет правильный шестиугольник (рис. 8.2, Вид В). Все двугранные углы у него одинаковы и равны 120° , что видно из чертежа – на проекции, где он имеет очертания шестиугольника, изображены истинные величины этих углов.

Данное тело относится к немногочисленной группе многогранников, имеющих кубическую симметрию, которую мы упоминали в предыдущем разделе. Каждая его ось,

проведенная через противоположные острые вершины, является осью симметрии 4-го порядка (напомним, что порядок оси симметрии говорит, сколько раз фигура совместится сама с собой за один полный оборот вокруг этой оси). Ось эту будем называть *большой*, так как вдоль нее ромбододекаэдр имеет наибольший размер – таких осей у него 3. Далее – ось, проходящая через каждую пару противоположных тупых вершин, является осью симметрии 3-го порядка, и называть мы ее будем *средней* осью – их у ромбододекаэдра 4. И, наконец, ось, проведенная через середины параллельных граней, является осью симметрии второго порядка, которую назовем *малой* осью (вдоль нее многогранник имеет минимальный размер) – их у него 6. Следовательно, у ромбододекаэдра всего 13 осей симметрии.

Много у этого тела и плоскостей симметрии – через каждую большую ось проходит четыре таких плоскости, через среднюю – три плоскости, а через малую – две. В сумме должно получиться 36 плоскостей, но многие из них совпадают, так что действительно различных плоскостей симметрии остается всего 9, как и у куба.

И, наконец, центр симметрии – он лежит в середине многогранника на пересечении всех его осей (напомним, что центр симметрии тела – это такая его внутренняя точка, что любая прямая, проведенная через нее, пересекает поверхность этого тела на одинаковых расстояниях по обе стороны от этой точки).

Возвращаясь к ребрам и граням, отметим, что каждое семейство параллельных между собой ребер ромбододекаэдра параллельно каждой из его средних осей, а у каждой пары параллельных между собой граней есть параллельная ей ось каждого вида. Кроме этого, каждая большая ось имеет 4 параллельные ей грани, каждая средняя ось – 6 параллельных граней, а каждая малая – две.

Далее. Вписанная в ромбододекаэдр сфера касается всех его двенадцати граней точно в их серединах. Если же мы опишем сферу вокруг него, то на этой сфере будут лежать только острые вершины, а тупые немного не дойдут до нее. Поэтому это тело является описанным, но не является вписанным многогранником.

Самым замечательным, пожалуй, в этом многограннике является его свойство заполнять пространство. Чтобы проиллюстрировать это свойство, представим, что у нас есть много одинаковых ромбододекаэдров, и мы начинаем их складывать как кубики – точно, один к другому, грань к грани. Вскоре мы заметим, что они так прикладываются друг к другу, что между ними не остается никаких пустот, то есть их укладка полностью заполняет пространство, а расположены они при этом все параллельно (то есть у них параллельно направлены одинаковые оси). Многогранники, обладающие таким свойством – в неограниченном количестве складываются друг с другом, не образуя пустот, имеют особое название – *параллелоэдры** (кстати говоря, кубики, которые любят складывать дети, это самый известный вид параллелоэдров).

То, что наш многогранник оказался параллелоэдром, неудивительно, если вспомнить предыдущий раздел – ведь там мы пришли к нему, построив ячейки Дирихле – Вороного для центров плотно уложенных шаров. А свойство этих областей как раз и состоит в том, что они делят между собой все пространство, где уложены шары. То есть, любая точка этого пространства обязательно должна войти в какую-то одну из этих ячеек, так что пустых мест между ними быть не может, как и не может быть их пересечения.

Теперь займемся описанием геометрических соотношений нашего замечательного двенадцатигранника, основываясь на рис.8.2. За базовый размер, через который будут выражены все остальные, примем длину ребра t (Вид Б).

* Эти многогранники нашел в 1890г. русский ученый – геометр и кристаллограф – Евграф Степанович Федоров (1853 - 1919). Он и дал им это название.

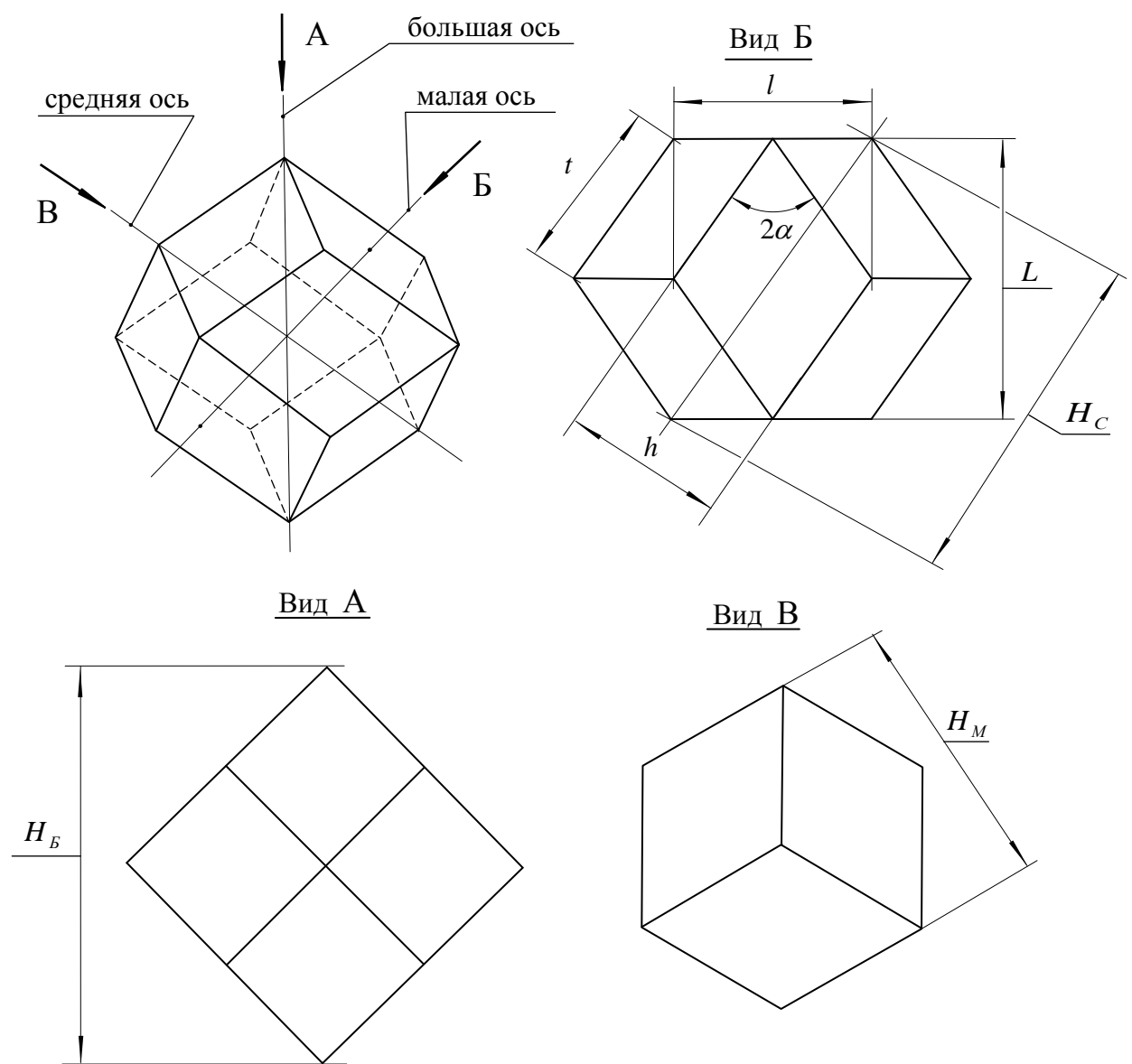


Рис.8.2. Чертеж ромбододекаэдра

Итак, размеры ромбододекаэдра:

- высота ромба - грани:
$$h = \frac{2\sqrt{2}}{3} t; \quad (8.1)$$

- длина малой диагонали грани:
$$l = \frac{2}{\sqrt{3}} t; \quad (8.2)$$

- длина большой диагонали грани:
$$L = l\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} t; \quad (8.3)$$

$$\text{- половина острого угла грани: } \alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35.26^\circ; \quad (8.4)$$

$$\text{- размер многогранника вдоль большой оси: } H_B = \frac{4}{\sqrt{3}} t; \quad (8.5)$$

$$\text{- размер многогранника вдоль средней оси: } H_C = 2 t; \quad (8.6)$$

$$\text{- размер многогранника вдоль малой оси: } H_M = L = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} t. \quad (8.7)$$

Другие геометрические характеристики ромбододекаэдра:

$$\text{- площадь грани: } S_F = h t = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^2; \quad (8.8)$$

$$\text{- площадь всей поверхности: } S = 12 S_F = 8\sqrt{2} t^2; \quad (8.9)$$

$$\text{- объем многогранника: } V = L^2 l = \frac{16}{3\sqrt{3}} t^3; \quad (8.10)$$

$$\text{- радиус описанной сферы: } R_O = l = \frac{2}{\sqrt{3}} t; \quad (8.11)$$

$$\text{- радиус вписанной сферы: } R_B = \frac{H_M}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} t; \quad (8.12)$$

- радиус сферы, имеющей объем, равный объему ромбододекаэдра:

$$R_V = \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}\pi}} t; \quad (8.13)$$

- индекс многогранника (см. раздел 4):

$$Ih_0 = 8(2\sqrt{3} - \pi) t. \quad (8.14)$$

Когда ромбододекаэдры уложены так, что без пропусков заполняют пространство, то внутри этой укладки к каждой острой вершине сходится 6 многогранников, у тупых же вершин сходится 4 многогранника, а по каждому ребру примыкают друг к другу 3 смежных ромбододекаэдра. В дальнейшем такая структура будет изображаться на рисунке в виде множества правильных плотно уложенных шестиугольников.

С каждым выпуклым многогранником связан другой – *двойственный* (иногда называют *дуальный*) ему. Он получается, если в первом на месте вершин образовать грани, тогда на старых гранях у нового тела окажутся вершины. Таким образом, у исходного и двойственного ему многогранников грани и вершины меняются местами. Для ромбододекаэдра двойственный многогранник можно построить так: через острые вершины проводим плоскости, перпендикулярные соответствующим большим осям, и

получаем куб. При этом напротив каждой тупой вершины ромбододекаэдра оказывается вершина полученного куба. Теперь убираем эти вершины куба, срезая их плоскостями, перпендикулярными средним осям ромбододекаэдра так, чтобы у нового тела стало шесть квадратных граней и восемь – треугольных. Такое построение показано на рис.8.3. В результате получается *кубооктаэдр* – так же полуправильный многогранник, с которым в будущем нам придется встретиться.

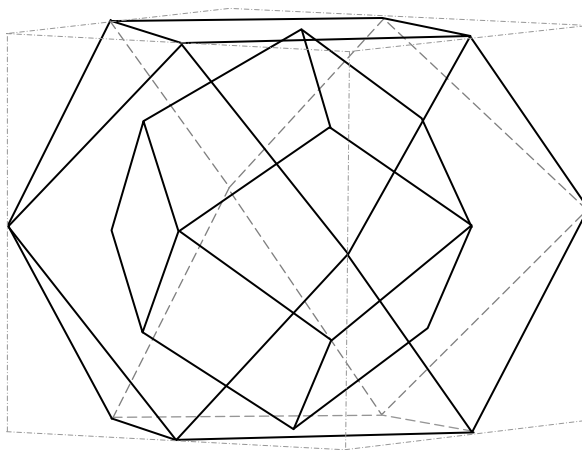


Рис.8.3. Построение многогранника, двойственного ромбододекаэдру

Теперь, уделив достаточно внимания геометрическому ромбододекаэдру, рассмотрим его жидкостный аналог – скругленный ромбододекаэдр. Понятно, что если первый представляет собой ячейку, то второй – деформированную каплю жидкости в этой ячейке. На рис. 8.4 они изображены именно так. Нетрудно видеть, что форма капли в этом случае имеет те же оси и те же плоскости симметрии, что сам ромбододекаэдр.

Рассмотрим свободную поверхность этой капли. Она делится на три вида участков: между дугами АВ, CD и EF - участок тупой вершины ромбододекаэдра, между GH, JK, LM и NO – участок острой вершины, а между дугами АВ и GH - уже знакомый нам, цилиндрический участок. Понятно, что такое деление выполняется под всеми ребрами и вершинами ячейки.

При данной степени деформации капли цилиндрические поверхности имеют некоторую длину L_c , одинаковую на всех ребрах. Если уменьшать сжатие капли, раздвигая сжимающие плоскости, то длина цилиндрических поверхностей будет уменьшаться, пока не станет равной нулю, а дуги АВ и GH совпадут. Но до этих пор первые два вида участков поверхности хотя и будут изменяться в размерах, но останутся подобными самим себе – такое уже встречалось в разделе 3 для ячейки в форме прямого параллелепипеда. При дальнейшем уменьшении сжатия цилиндрическая часть исчезнет, а форма остальных участков, как мы знаем, будет все время меняться с уменьшением деформации капли, пока все они не станут одной сферической поверхностью.

Как и ранее, обозначим через r радиус цилиндрических участков и выразим через него некоторые геометрические характеристики рассматриваемой поверхности. Приведенные ниже выражения получены в результате физико-геометрического расчета поверхности жидкого тела данной формы и аппроксимации ее аналитическими функциями. Итак:

- длина отрезка ребра, соответствующая тупому скругленному углу (рис.8.4):

$$L_B = 1.799 r ; \quad (8.15)$$

- длина отрезка ребра, соответствующая острому скругленному углу:

$$L_S = 3.598 r ; \quad (8.16)$$

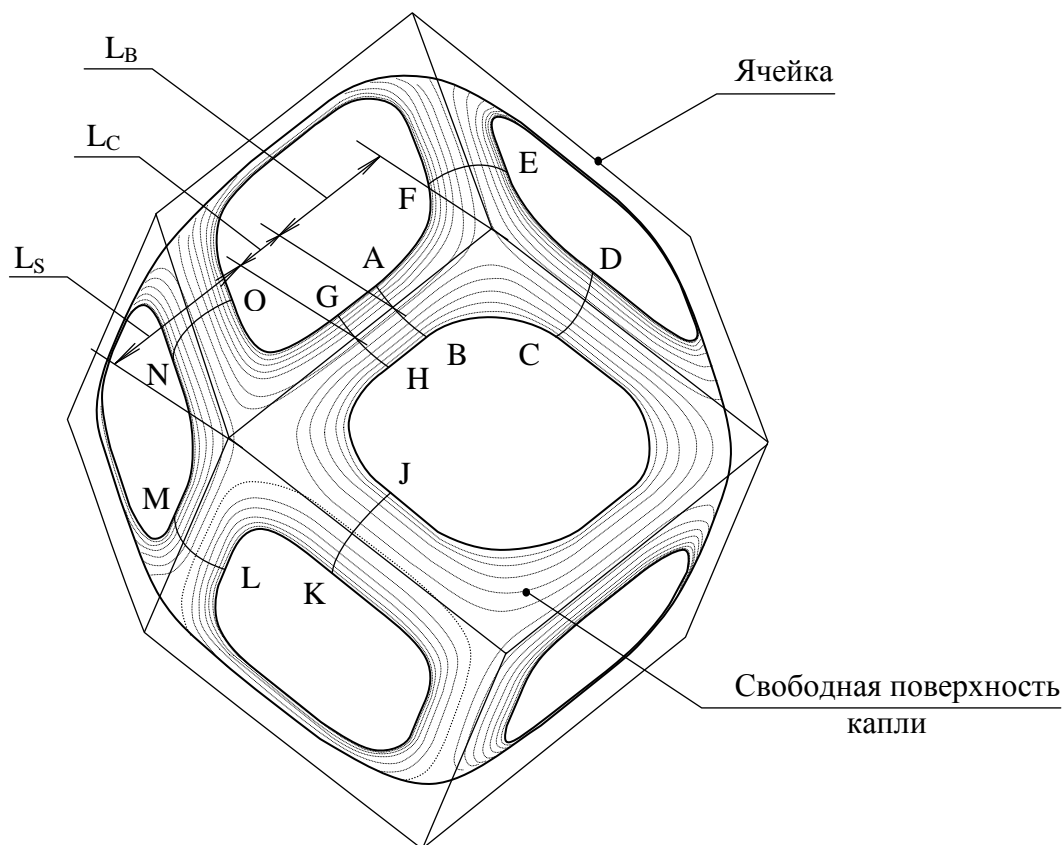


Рис.8.4. Сжатая капля с ячейкой в виде ромбододекаэдра.

- площадь поверхности тупого скругленного угла:

$$S_B = 5.172 r^2 \quad (8.17)$$

- площадь поверхности острого скругленного угла:

$$S_S = 14.260 r^2 \quad (8.18)$$

- объем, заключенный между тупым углом ячейки и поверхностью жидкости под ним:

$$V_B = 0.455 r^3 \quad (8.19)$$

- объем, заключенный между острым углом ячейки и поверхностью жидкости под

ним:

$$V_s = 1.170 r^3 \quad (8.20)$$

Теперь оставим формулы и представим пространство, заполненное одинаковыми ячейками, приложенными друг к другу, одна из которых изображена на рис.8.4. Затем удалим не существующие на самом деле острые ребра этих многогранников. Оставшиеся скругленные ромбододекаэдры – сжатые капли, в совокупности дадут ту самую картину, какую мы увидели бы в системе сжатых капель, если бы удалось посмотреть на нее изнутри. Но об этом – дальше.

9. Регулярная структура системы сжатых капель

Рассмотрим подробно процесс образования структуры системы. Вспомнив описанный в разделе 1 процесс сжатия множества капель внутри эластичной оболочки, начнем с того момента, когда капли еще не деформированы и едва касаются друг друга.

Мы знаем, что в таких условиях сферические тела, не обладающие трением, достигают устойчивого взаимного расположения только в состоянии плотной упаковки. Но в разделе 7 мы видели, что плотных упаковок, в которых слои смещены по-разному – множество. Почему же мы утверждаем, что капли системы будут укладываться именно в плотную кубическую упаковку, единственную из всех возможных? Сделать такой вывод нам позволяет *общий принцип симметрии*, который сформулировал П. Кюри*, и который применим ко всем физическим явлениям (цитируется по книге [6]): «Если определенные причины вызывают соответствующие следствия, то элементы симметрии причин должны проявляться в вызванных ими следствиях. Если в каких-либо явлениях обнаруживается определенная дисимметрия (т. е. нарушение, расстройство симметрии), то эта же дисимметрия должна проявляться в причинах, их породивших».

Применяя этот принцип к нашему случаю, можно утверждать, что сферически-симметричное сжатие системы приведет к плотной упаковке шаров, обладающей наивысшей симметрией пространственной структуры, которой и является плотная кубическая упаковка.

Смотрим на процесс дальше, когда система начинает сжиматься. Тип решетки, образованной центрами капель (мы уже не можем говорить «центрами шаров» - капли уже не шары), при сжатии не будет меняться – должна сохраняться ее кубическая симметрия, как следует из цитированного выше принципа, поэтому она остается кубической гранецентрированной, только у этой решетки пропорционально уменьшаются все расстояния между точками. При этом не меняется и вид областей Дирихле–Вороного, но они только уменьшаются в размерах – об этом уже говорилось в 7 разделе. Если в каждую ячейку, как в многогранник, вписать шар, то все эти шары опять окажутся в плотной кубической упаковке.

Поскольку все капли находятся в абсолютно равных условиях (рассматривается только регулярная зона), давления в них одинаковы, и все поверхности контакта плоские. Поэтому каждая капля - в дальнейшем будем называть ее иногда *элемент* системы - принимает форму скругленного варианта ячейки Дирихле–Вороного. Несколько таких смежных элементов показаны на рис.9.1.

Итак, все капли - одинаковые скругленные ромбододекаэдры с одним и тем же внутренним давлением, а отсюда – все контактные силы между ними тоже одинаковые, и каждый элемент находится в равновесии под действием этих сил. Дальнейшее сжатие системы до некоторых пределов (об этом - ниже) принципиально ничего не меняет в ее структуре, только увеличивается давление в каплях, уменьшая радиус свободной поверхности, увеличивается площадь контактных поверхностей и растут контактные силы.

Мы видим, что от степени сжатия системы зависит форма ее элементов, давление в них, контактные силы, и т.д., поэтому нам необходим параметр, который численно характеризовал бы эту степень сжатия. В качестве такого параметра возьмем отношение диаметра недеформированной капли, который ранее мы обозначили a , к наименьшему радиусу $r = \rho_{\min}$ поверхности деформированной капли, и назовем его *степенью сжатия системы*, обозначив буквой C :

* Кюри, Пьер (1859 - 1906) – французский физик – с 1883 г. по 1895 г. занимался физикой кристаллов. Наибольшую известность ему принесло открытие совместно с женой М. Склодовской-Кюри радиоактивных элементов полония и радия.

$$C = \frac{a}{r} \quad (9.1)$$

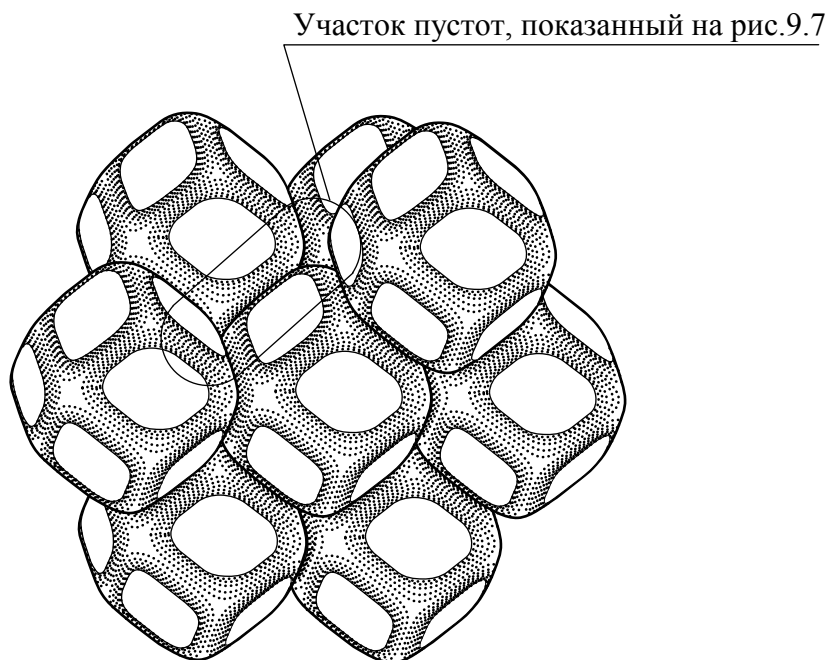


Рис.9.1. Участок системы сжатых капель.

Если принять объем капли равным 1, то согласно выражению (5.9) $a = 1.2407$, и:

$$C = \frac{1.2407}{r} \quad (9.1')$$

Такую систему, в которой объем элемента, принят равным 1, будем называть *стандартной*. Дальнейшее изложение будет относиться к таким – стандартным системам, и только в отдельных случаях, когда реальный размер элементов будет отличаться от принятого, об этом будет сказано особо.

Используя геометрические характеристики ромбододекаэдра, приведенные в разделе 8, а именно – выражение (8.13) радиуса сферы, равновеликой ромбододекаэдру с длиной ребра t , а так же характеристики (8.15) и (8.16) скругленного ромбододекаэдра, найдем минимальное значение C , при котором начинают образовываться цилиндрические участки на свободной поверхности капель:

$$C_{\min} = \frac{2}{r} \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{3}\pi}} (1.799r + 3.598r) \approx 10 \quad (9.2)$$

Таким образом, мы будем иметь дело с системой, у которой:

$$10 < C < \infty \quad (9.3)$$

Здесь нужно сделать особую оговорку. Представляя сжатие системы до бесконечно больших давлений, мы предполагаем, что ее структура будет оставаться постоянной до конца, а ячейки всегда будут ромбододекаэдрами. Однако мы не можем утверждать, что при какой-то степени сжатия система не перестроит свою структуру, а ячейки не примут другую форму. Такой вариант нельзя отбрасывать по следующей причине.

Как известно, любая физическая система принимает состояние с минимальной (при данных условиях) потенциальной энергией. Можно с большим основанием считать, что этому принципу подчиняется и наша система, придавая своим элементам минимально возможную площадь поверхности. Однако если поставить задачу разбить пространство на одинаковые ячейки заданного объема при условии минимума площади границ, то разбиение на ромбододекаэдры далеко не лучшее. Оказывается, ячейки в виде усеченных октаэдров (это тоже параллелоэдры) гораздо оптимальнее, т.е. у них значительно меньше площадь поверхности. Но, поскольку никакая плотная укладка шаров таким ячейкам не соответствует, подобная структура не может образоваться сразу с началом сжатия, если она вообще образуется. И все же мы не можем гарантировать, что такая перестройка ячеек никогда не произойдет. Поэтому введем в неравенство (9.3) уточнение - мы будем иметь дело с системой, у которой:

$$10 < C \leq C_{пред}, \quad (9.4)$$

где $C_{пред}$ – наибольшая величина степени сжатия, до которой система сохраняет свою исходную структуру.

Разумеется, мы не знаем величину $C_{пред}$, но полагаем, что если она существует, ее значение намного больше 10, чтобы все дальнейшее изложение имело смысл.

Вообще говоря, основные принципы излагаемой теории сжатых капель не зависят от вида структуры системы, т.е. от формы ее ячеек. Требуется только, чтобы структура была периодической, а ячейки заполняли пространство без пропусков. Поэтому при $C > C_{пред}$, если образуется новая структура, необходимо будет просто рассматривать ячейки другой формы.

В выражении (9.1') участвуют только линейные размеры, поэтому величина степени сжатия является геометрической характеристикой системы. Если же в это равенство вместо r подставить его выражение (3.2) через коэффициент поверхностного натяжения жидкости и давление внутри капли, то получится уравнение, связывающее геометрический параметр системы и физические параметры жидкости:

$$\frac{p}{C} = \frac{f}{1.2407} \quad (9.5),$$

где p – давление в каплях;

C – степень сжатия системы;

f - коэффициент поверхностного натяжения жидкости капель.

При проверке размерностей слева и справа в равенстве (9.5), необходимо помнить, что константа в знаменателе правой части имеет размерность длины.

Теперь вспомним раздел 4, где в определении индекса ячейки был введен радиус r_0 , зависящий от состояния системы (формула (4.8)). Так как состояние это задается величиной C , данный радиус в стандартной системе определяется так:

$$r_0 = \frac{a}{C} = \frac{1.2407}{C} \quad (9.6)$$

Степень сжатия C – единственный параметр, который определяет всю геометрию системы, поэтому, если C постоянно, все соотношения размеров в ее структуре, форма поверхностей и кривых – это константы.

Поскольку жидкость несжимаема, объем самих капель всегда остается постоянным, каких бы больших величин ни достигало давление в них. Ячейки же, в которые помимо жидкости входят и пустоты, меняют свой объем с изменением степени сжатия. Найдем зависимость объема ячеек в системе от величины C .

Объем ячейки P равен сумме объема капли и объема V_h пустот:

$$P = 1 + V_h \quad (9.7)$$

Объем пустот в ячейке-ромбододекаэдре состоит из 8 объемов в тупых углах, 6 объемов в острых углах, и 24 объемов над цилиндрическими поверхностями на ребрах (рис.8.4):

$$V_h = 8V_B + 6V_S + 24L_C \frac{2\sqrt{3}-\pi}{6} r^2, \quad (9.8)$$

где, как ранее принято: r – радиус свободной поверхности на цилиндрических участках.

Обозначим длину ребра ромбододекаэдра t . Тогда, подставив в (9.7) выражение (8.10) объема ячейки, а в (9.8) выражения (8.15), (8.16), (8.19) и (8.20) получим кубическое уравнение:

$$\frac{16}{3\sqrt{3}} t^3 = 1 + 8 \cdot 0.455 r^3 + 6 \cdot 1.170 r^3 + 24(t - 1.799 r - 3.598 r) \frac{2\sqrt{3}-\pi}{6} r^2, \quad (9.9)$$

действительное решение которого имеет вид:

$$t = \frac{1.625 r^2}{(256 + 945.742 r^3 + \sqrt{65536 + 484220 r^3 + 887658 r^6})^{1/3}} + 0.086(256 + 945.742 r^3 + \sqrt{65536 + 484220 r^3 + 887658 r^6})^{1/3} \quad (9.10)$$

Поскольку это выражение довольно сложно для дальнейшего применения, аппроксимируем его степенной функцией:

$$t = 0.687 + 0.560 r^{2.29} \quad (9.11)$$

Тогда выражение объема ячейки из (8.10):

$$P = \frac{16}{3\sqrt{3}} (0.687 + 0.560 r^{2.29})^3 \quad (9.12)$$

Последним шагом в получении искомой зависимости будет замена радиуса r в (9.12) его выражением из (9.1'):

$$P = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(0.687 + 0.560 \left(\frac{1.2407}{C} \right)^{2.29} \right)^3 \quad (9.13)$$

Для более наглядного представления зависимости объема ячейки от степени сжатия системы, покажем ее в графическом виде на рис.9.2.

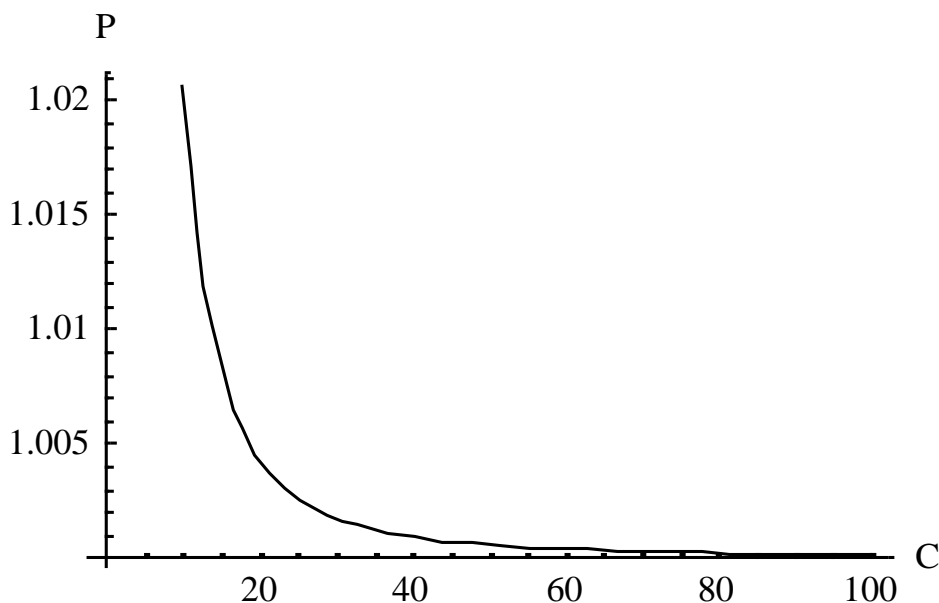


Рис.9.2. Зависимость объема ячейки от степени сжатия системы.

Как видим, вначале, с ростом степени сжатия, пустоты между каплями быстро заполняются, и объем ячейки приближается к объему самой капли.

Вернемся к структуре системы. Мы выяснили, что она представляет собой плотное заполнение пространства ромбододекаэдрами, которыми являются ячейки капель. В такой структуре есть интересные закономерности – если бы нам удалось посмотреть на нее сквозь толщу плотно уложенных многогранников, то мы обнаружили бы, что в этом пространстве выделяется шесть семейств параллельных плоскостей, на которых лежат грани ромбододекаэдров, а каждая ячейка находится между двумя плоскостями каждого семейства.

На рисунке 9.3 показаны по несколько плоскостей каждого семейства (там, где это не очевидно, грани, лежащие на одной плоскости, имеют одинаковое направление штриховки). Чтобы лучше представить взаимное расположение плоскостей, черным кружком на рисунках обозначена сторона одной плоскости, обращенная к двум другим.

Наименьшее расстояние между параллельными плоскостями каждого семейства равно половине расстояния между параллельными гранями ромбододекаэдра (на рисунках 9.3 а и 9.3 б одна плоскость между двумя показанными пропущена). Все эти плоскости будем называть *граневыми плоскостями*. Если рассмотреть сечение системы, сделанное любой из этих плоскостей, то оно будет иметь вид, изображенный на рис.9.4. На этом рисунке заштрихованные шестиугольники – это сечения ячеек данной плоскостью, а чистые ромбы – грани ячеек, лежащие на ней.

Поскольку структура нашей системы состоит из параллелоэдров, одинаковые оси которых направлены параллельно, то эти оси (как ранее - плоскости) разделим на семейства. Как и у отдельного ромбододекаэдра, здесь имеем три семейства больших осей, ортогональные друг другу. Средние оси всех ячеек образуют четыре семейства средних осей, а малые – шесть семейств.

Все эти оси определяют направления в системе. Согласно названию осей будем выделять соответственно *большие направления*, *средние направления* и *малые направления*. Все их назовем *главными направлениями системы*. На рис. 9.5 показано каждое из главных направлений относительно отдельной ячейки, а справа внизу дано

соотношение между этими направлениями на примере одного октанта пространственной ортогональной системы координат – если координатные оси направить вдоль больших направлений, то малые направления совпадут с диагоналями координатных плоскостей, а средние направления будут диагоналями пространственных октантов.

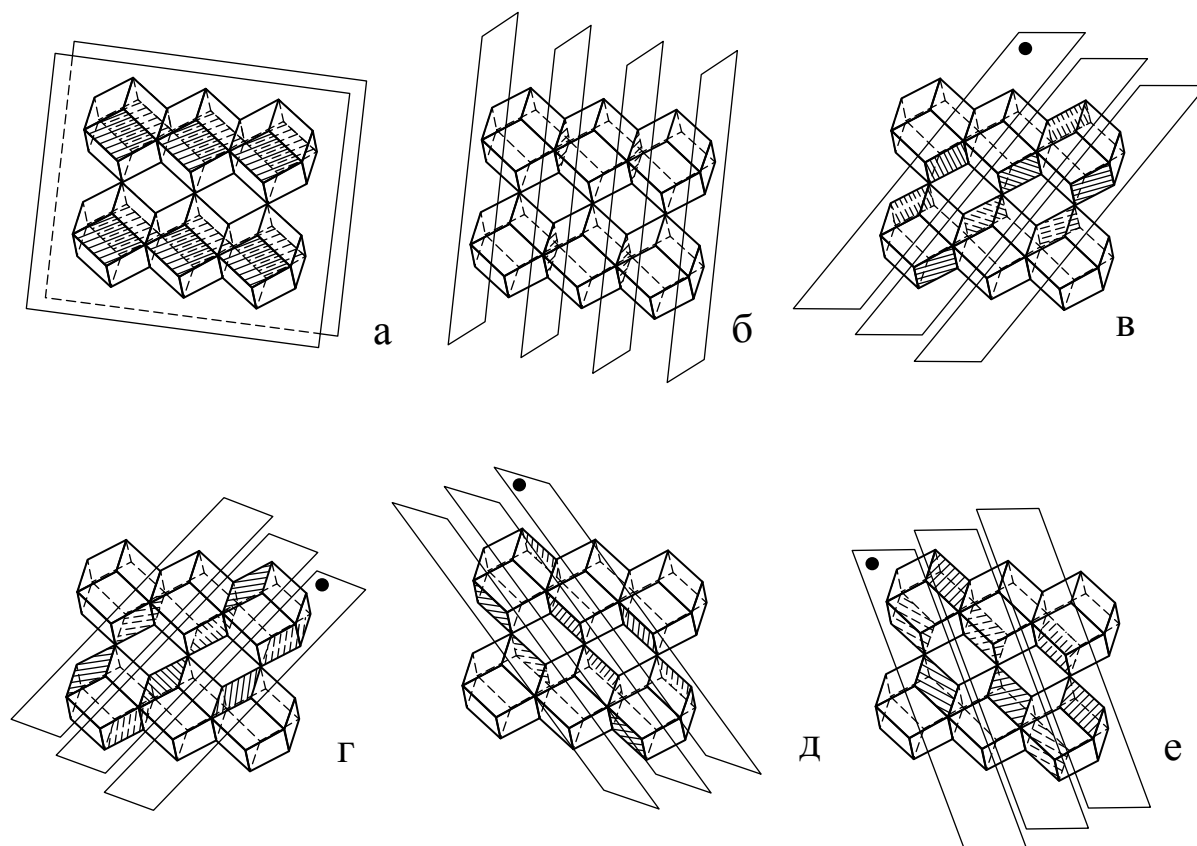


Рис.9.3. Семейства плоскостей граней в структуре системы.

Отметим еще одну особенность структуры нашей системы. Как мы знаем, у ячейки в форме ромбододекаэдра грани попарно параллельны. Выделим в структуре произвольную ячейку и рассмотрим какую-нибудь пару ее параллельных граней. С обеих сторон по этим граням к ней примыкают соседние ячейки. У каждой из них к такой же параллельной грани примыкает следующая. Таким образом, от выбранной ячейки в обе стороны тянется ряд ячеек, прижатых друг к другу по параллельным граням, как, например, изображено на рис. 9.6. Такой ряд будем называть *цепочкой ячеек*, или просто *цепочкой*, а грани, по которым соприкасаются эти ячейки – *внутренними гранями цепочки*. Множество таких прямолинейных цепочек проходят через всю систему в шести малых направлениях - вдоль малых осей каждого ромбододекаэдра, поэтому каждая ячейка лежит на пересечении шести цепочек.

Рассматривая множество плотно уложенных скругленных ромбододекаэдров, мы обнаружим, что в такой структуре есть пустоты - между каждыми тремя элементами, сложенными к одному ребру, образуется *канал* треугольного сечения, а между элементами, сходящимися к одной вершине, остается довольно объемная полость. Все эти каналы и полости сообщаются между собой и образуют единую сеть, пронизывающую всю систему.

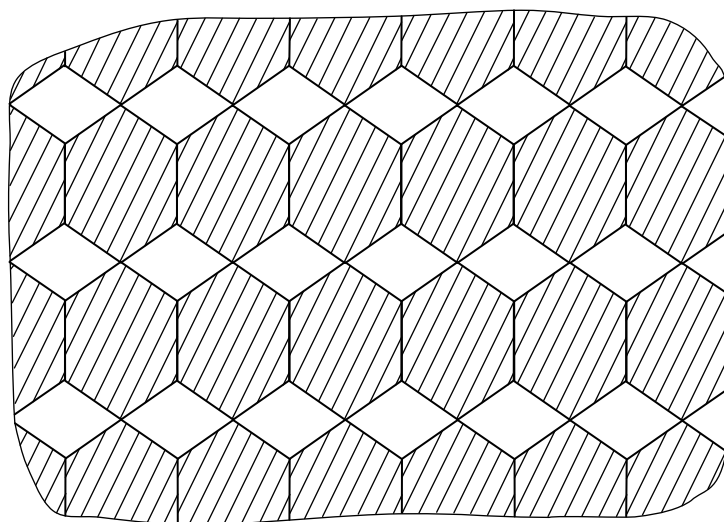


Рис.9.4. Сечение системы граневой плоскостью.

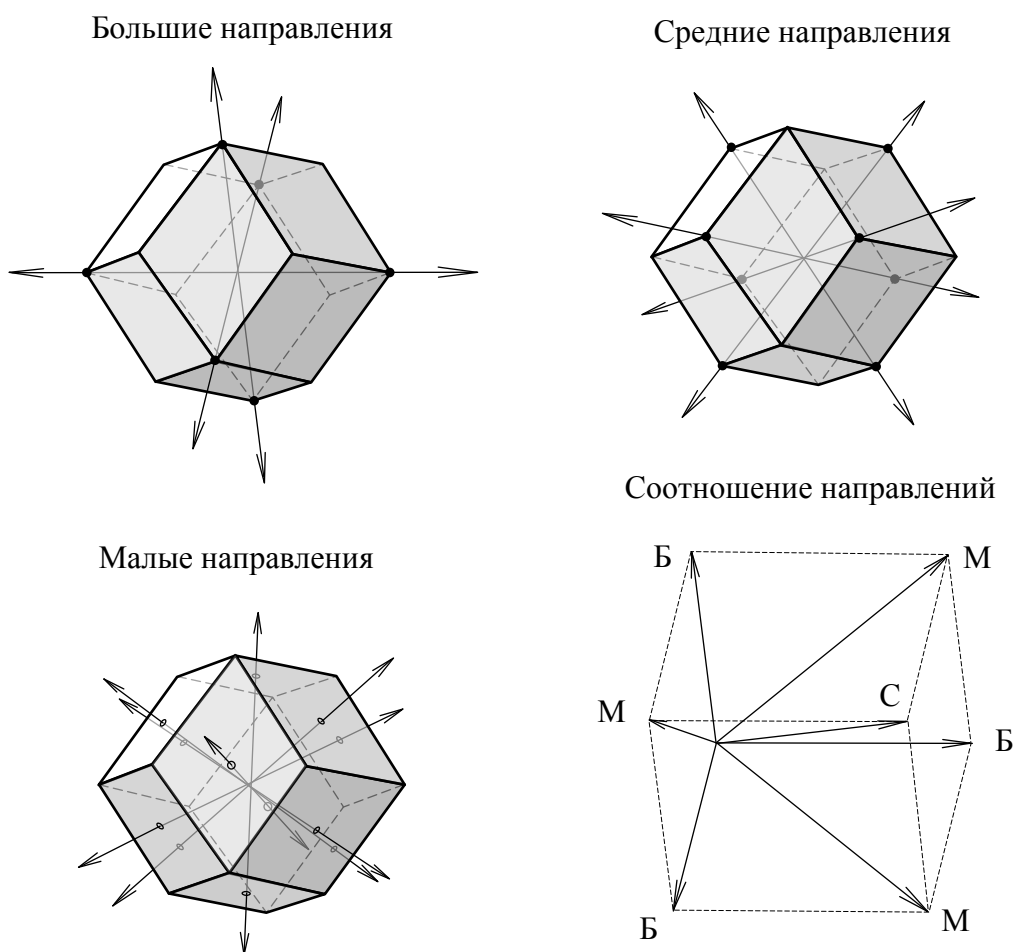


Рис.9.5. Главные направления системы.

Полости между обращенными друг к другу скругленными вершинами элементов делятся на два вида – там, где сходятся острыми вершинами 6 элементов, имеем *кубическую полость*, а где сходятся тупыми вершинами 4 элемента – *тетраэдрическую полость*. Названия эти (кубическая и тетраэдрическая) происходят от того, какой правильный многогранник максимально заполнит эту полость. Поскольку нам известны геометрические характеристики скругленных вершин (формулы (8.19) и (8.20)), то можно рассчитать, что при одних и тех же условиях объем кубической полости в 3.86 раз больше объема тетраэдрической.

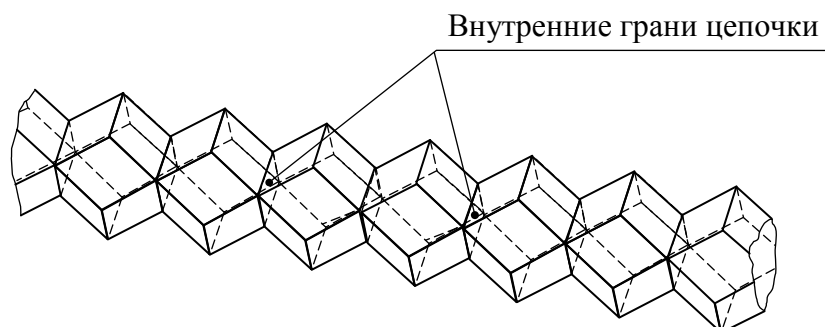


Рис.9.6. Цепочка ячеек в структуре системы.

На рис.9.1 выделен участок пустот между элементами системы, где полости каждого вида соединены каналом (два элемента системы, которые сверху закрывают указанные полости, не изображены). Этот же участок пустот в увеличенном виде показан на рис. 9.7. Здесь сами капли не показаны, а изображены только их свободные поверхности, ограничивающие пустоты.

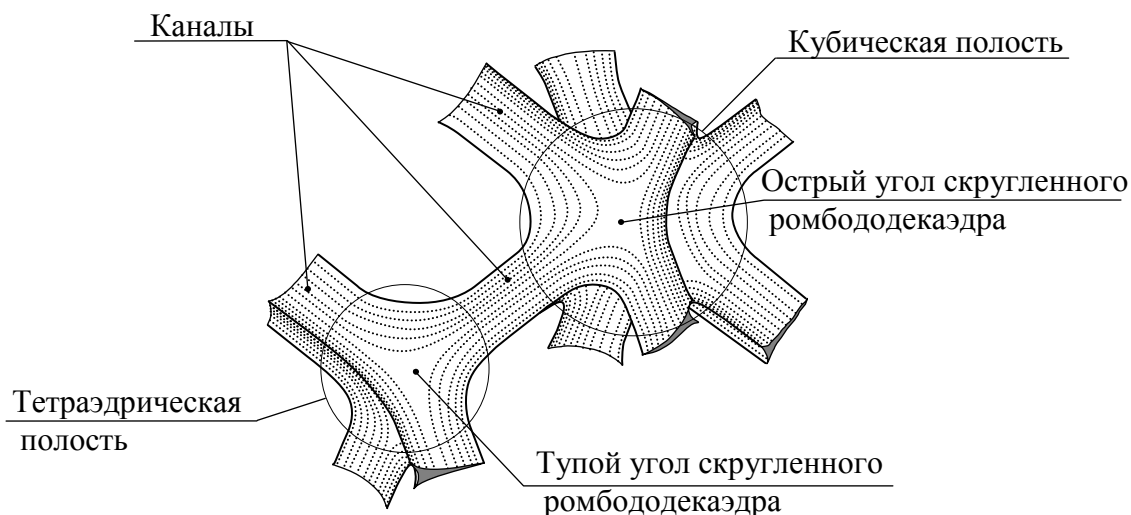


Рис.9.7. Участок пустот системы сжатых капель

После рассмотрения общей структуры системы поговорим о ее энергии. Такая упругая среда, как наша система, если можно так выразиться, насквозь «пропитана» энергией. Как

было показано в разделе 5, энергия капли аккумулируется в ее поверхности, а поверхность каждого элемента увеличивается с ростом степени его сжатия, следовательно, количество энергии в каждой единице объема системы зависит от того, насколько сильно она сжата, то есть от величины C .

Наряду с энергией поверхности, элементы системы могут обладать и кинетической энергией. Для этого, как известно, они должны иметь возможность двигаться с некоторой скоростью. Поскольку нас интересуют процессы, происходящие внутри системы, то, говоря о скорости, имеется в виду скорость одного элемента относительно другого. Но о какой относительной скорости может идти речь, когда вся система плотно сжата? Если учесть, что каждый элемент – это жидкость и что между ними есть пустоты, то под действием некоторой силы капля может сместиться, деформируясь, частично заполняя некоторые смежные с ней пустоты, и увеличивая площадь поверхности. Тогда будет наблюдаться, хоть и микроскопическое (по сравнению с размером самого элемента) но все-таки смещение ее центра масс с переменной скоростью. Смещение это вызовет изменение контактных сил, нарушая состояние равновесия неподвижных смежных капель, и приводя их в движение, которое будет передаваться дальше по системе. Конечно, давления в различных точках капли при таком неравномерном движении будут разные, поэтому детальное рассмотрение этого процесса представляется довольно сложным и откладывается на будущее.

Наличие в нашей системе двух видов энергии - поверхностной и кинетической, и условий их перехода друг в друга, позволяет рассматривать возможность колебательных процессов в ней. Эти процессы будут обсуждены много позже, а пока же ограничимся утверждением, что колебания, возникшие по каким-то причинам в некоторой точке системы, будут распространяться в ней во все стороны без затухания со скоростью, зависящей от свойств жидкости и от степени сжатия.

Особенность строения системы, как множества плотно уложенных ромбододекаэдров, придает ей особое свойство – сопротивляемость сдвигу. В самом деле, в ее структуре нельзя найти ни одной плоскости, в которой несколько элементов системы могли бы свободно сдвинуться относительно других. Другими словами, любая плоскость, проведенная в ней, обязательно будет рассекаать какие-то элементы, которые и будут препятствовать сдвигу по этой плоскости. Поэтому в этой системе возможны не только продольные, но и поперечные колебания, т.е. такие, при которых колебание элементов происходит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. По всей видимости, в этой системе продольные и поперечные колебания не происходят каждая в чистом виде. При смещении какого-либо элемента в любом направлении, у него обязательно найдутся грани, расположенные под углом к направлению смещения. Скольжение по этим граням неизбежно вызовет появление составляющей относительного смещения соседних элементов в другом направлении. Поэтому при возникновении продольных колебаний у них обязательно появится поперечная составляющая, а у поперечных – продольная.

Итак, мы описали регулярную структуру системы сжатых капель. Как видим, в ней царит абсолютный порядок и симметрия – как в идеальном кристалле. В какую бы сторону мы ни двигались по ней, все будет одинаково и однообразно до бесконечности, поэтому такая структура не содержит ничего неожиданного и интересного. Давайте же нарушим этот порядок и введем в идеальную структуру нашей системы какое-нибудь искажение. Как это сделать, и к каким удивительным явлениям это приведет, мы узнаем дальше.

Глава 3

Искаженная система сжатых капель

10. Искажение структуры системы

Введем в регулярную структуру нашей системы искажение. Для этого просто «втиснем» между сжатыми каплями некоторое жесткое тело, размеры которого значительно больше одной капли, и назовем его *искажающим телом*. Если оно имеет сферическую форму, то в сечении мы увидим картину, похожую на рис.10.1 (здесь сечения капель даны схематично).

Очевидно, что это внедренное тело не может быть членом правильной неискаженной структуры и своим присутствием заставляет ее деформироваться. Капли системы, так правильно уложенные до этого, теперь вынуждены подвинуться, изменить свое взаимное расположение, чтобы освободить место под инородное тело, а изменение взаимного расположения неизбежно вызывает и изменение формы капель – стройный геометрический порядок нарушается, а при этом изменяется и симметрия структуры. В чем же заключается это изменение симметрии?

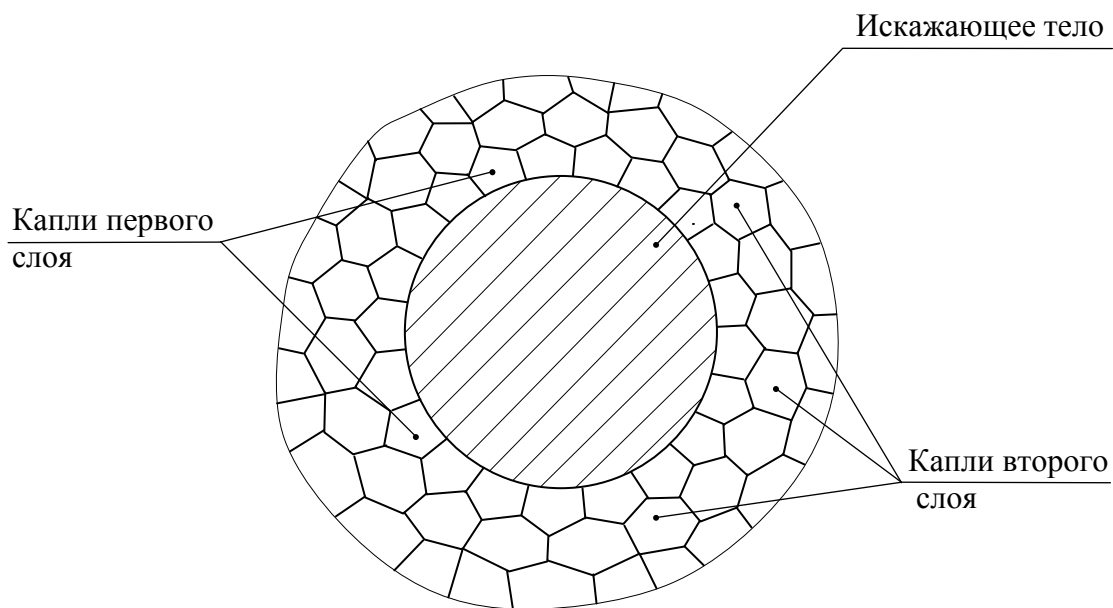


Рис.10.1. Вид сечения системы вокруг искажающего тела

В прошлом разделе мы познакомились с регулярной структурой, составленной из множества прижатых друг к другу одинаковых скругленных ромбододекаэдров. Каждая плоскость, ось или центр симметрии любой капли одновременно служили плоскостью, осью или центром симметрии всей системы в целом, если считать ее бесконечно протяженной во всех направлениях. Когда же мы вводим в систему искажающее тело, весь этот «хоровод» симметрий пропадает и остается только симметрия, общая и для системы, и для искажающего тела. Такой вывод следует из *принципа суперпозиции Кюри*, который гласит (цитируется по книге [6]): «Когда различные внешние воздействия или

воздействия и явления накладываются друг на друга, образуя единую систему, их дисимметрии складываются. В результате остаются лишь общие элементы симметрии».

Этот принцип используется в кристаллографии для изучения явлений, происходящих в кристаллах в результате внешних воздействий. Учитывая сходство структуры нашей системы с кристаллом, мы тоже можем воспользоваться этим принципом, рассматривая влияние искажающего тела как внешнее воздействие.

Напомним, что элементами симметрии какого-нибудь тела или структуры называются плоскости, оси и центр симметрии, которыми они обладают. Дисимметрия внешнего воздействия (в данном случае – искажающего тела), это есть отсутствие симметрии упомянутого тела относительно элементов симметрии исходной системы, а дисимметрия системы – это отсутствие симметрии относительно элементов симметрии тела (если таковые есть). Поэтому при их наложении остаются только элементы симметрии, общие и для системы, и для искажающего тела.

Примем, что искажающее тело имеет сферическую форму (будем называть его *искажающей сферой*). Сфера, как известно, имеет центр симметрии, совпадающий с ее геометрическим центром, и бесконечное число осей и плоскостей симметрии, проходящих через него.

Рассмотрим систему, которая еще не искажена, и возьмем в ней наугад любую точку. Эта точка может попасть как внутрь какой-нибудь ячейки, так и на границу между ними. Выбрав эту точку, отметим, какие элементы симметрии системы проходят через нее. Если случайным образом она совпала с центром одной из ячеек, или оказалась там, где сходятся их вершины, тогда через данную точку проходит несколько осей и плоскостей симметрии, а сама она оказалась одним из центров симметрии системы.

В другом случае, через выбранную точку может проходить только одна ось, или же одна плоскость симметрии, но возможно (а это наиболее вероятно при случайном выборе), что данная точка не обладает никакими особыми свойствами, и никакие элементы симметрии через нее не проходят.

Зафиксируем положение этой точки в пространстве, раздвинем капли и поместим среди них искажающую сферу так, чтобы ее центр точно совпал с выбранной точкой. Оказывается, что в искаженной таким образом системе останутся только те элементы симметрии, какие проходили через выбранную точку до искажения, а все остальные пропадут. Понятно, что если эта точка не обладала никакими особыми свойствами до искажения, то и искаженная система, строго говоря, не будет иметь никакой симметрии. Все сказанное можно сжать в краткую формулировку: искаженная сферическим телом система обладает только теми элементами симметрии, которые проходили через точку в неискаженной системе, совпадающей с центром искажающей сферы.

Следует подчеркнуть, что когда речь идет о сферическом искажающем теле, отсутствие симметрии структуры относительно центра этой сферы, если оно имеет место, необходимо понимать только в строгом математическом смысле. Для наблюдателя, которому представилась бы возможность увидеть элементы искаженной системы, все и всегда выглядело бы симметрично относительно центра искажения, и только очень тонкие измерения могли бы выявить отклонения от симметрии. Поскольку размеры искажающей сферы приняты значительно больше размера элемента, возможное несовпадение положения ее центра с какой-либо точкой симметрии неискаженной системы малó, и искаженную структуру всегда можно без заметной погрешности считать симметричной относительно центра искажающей сферы, несмотря на все сказанное выше.

С появлением искажения наша система, ранее безликая и однообразная, получила особую точку, своего рода начало координат – центр искажающего тела. Теперь все капли системы можно рассматривать по *слоям* относительно его поверхности. Те капли, которые непосредственно примыкают к поверхности искажающего тела, образуют первый слой элементов, их окружают капли второго слоя, за ним – третьего, и т.д. (рис. 10.1).

Чтобы исследовать искаженную систему и понять законы, которые в ней действуют, необходимо проследить процесс искажения с самого начала. Но что здесь считать

началом? Взглянем еще раз на неискаженную систему, например, на рис.9.1. Каждый ее элемент – это жидкая капля, принявшая определенную форму под действием окружения. Если же мы заменим одну из капель жестким телом такой же формы, то ни один элемент не изменит своего положения и структура системы никак не нарушится. А теперь удалим два стоящих рядом элемента, а вместо них вставим единое жесткое тело, формой точь-в-точь заменяющее эту пару ячеек. Система и на этот раз «не заметит» подмены. Таким образом, мы можем заменить единым жестким телом любое множество элементов системы, и ее структура при этом останется правильной. Единственное условие для этого – форма жесткого тела должна точно повторять внешние очертания заменяемого множества ячеек.

Теперь выделим в неискаженной системе такое множество элементов, которое по внешней форме наиболее близко подходило бы к сферической. Установлено, что ромбододекаэдры всегда можно плотно уложить в форму, внешние контуры которой будут отстоять от поверхности сферы того же объема не более чем на половину максимального размера ромбододекаэдра (разумеется, если совместить центр сферы с центром объема этой формы). Вот такое – близкое к сферическому множество элементов мы и заменим единым жестким телом такой же внешней конфигурации. Сечение такого тела, помещенного в систему, показано на рис.10.2. При этом, как видите, расположение элементов в системе не изменилось, и ее структура не пострадала. В дальнейшем такую форму, которая наиболее близка к сферической, и которая вписывается в регулярную структуру, будем называть *исходной конфигурацией*.

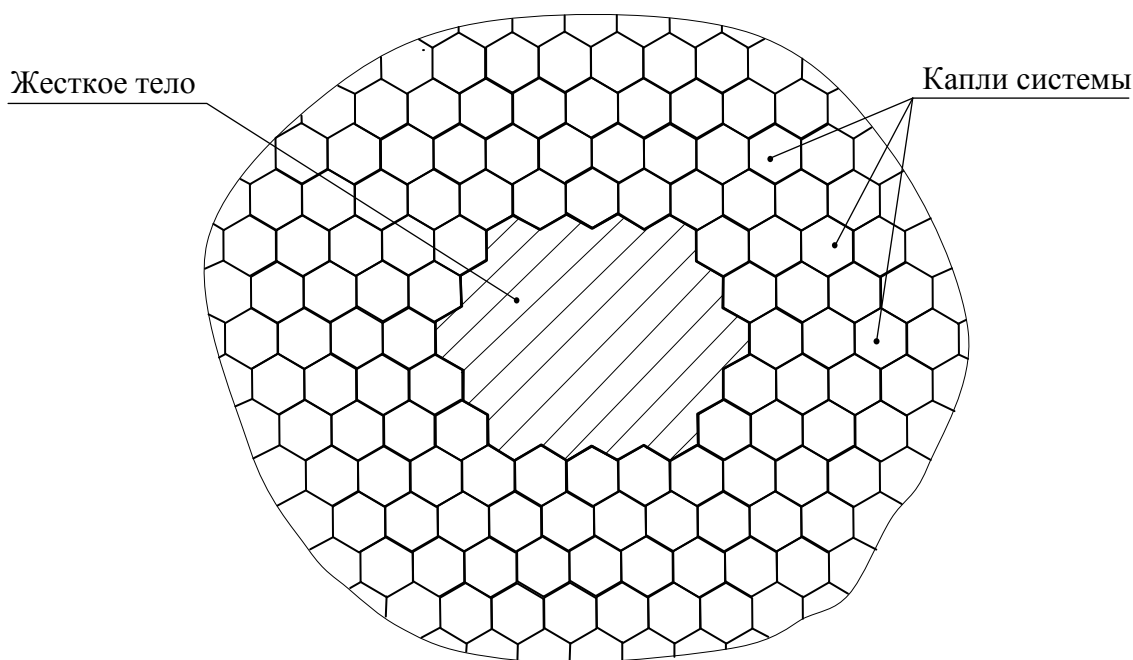


Рис.10.2. Жесткое тело, не изменяющее структуры системы.

Наделим это тело таким свойством – представим, что после того, как его поместили в систему, оно самопроизвольно изменило свою форму и стало сферой, не меняя объема. Свойство это не такое уж фантастическое – допустим, что это материал с «памятью» из которого вначале была сделана сфера, потом у этого тела изменили форму поверхности, выдавив на нем грани, точно повторяющие исходную конфигурацию. И теперь,

помещенное в систему, поначалу безвредное для нее, жесткое тело вдруг начинает возвращаться к своей первоначальной сферической форме, искажая всю окружающую структуру. В результате получится та самая картина, которая изображена на первом рисунке этого раздела.

Мы видим, что искажение системы произошло только в результате превращения нашего жесткого тела из многогранника в сферу. Всего-навсего, выправив неровности своей поверхности, даже не изменяя своего объема, поначалу незаметное для структуры инородное тело, стало искажающим. А ведь, как уже сказано, высота неровностей его поверхности не превышала половины размера ячейки системы!

Описанный эксперимент с изменением формы жесткого тела нам неоднократно пригодится в дальнейшем, а сейчас он позволяет сделать некоторый общий вывод – систему искажает не объем тела, а его поверхность, форма которой несовместима с регулярной структурой. Попутно заметим, что в этой главе мы будем рассматривать искажающие тела только сферической, либо очень близкой к ней формы.

Итак, мы сопоставили два крайних состояния системы, содержащей инородное тело – полное отсутствие искажения и максимальное искажение, какое может вызвать искажающая сфера такого размера. А как происходит переход от одного состояния к другому?

Прежде, чем детально рассматривать процесс искажения системы, выясним, что представляют собой исходные конфигурации.

Исходная конфигурация, как уже отмечалось, это форма, которая повторяет внешние очертания совокупности плотно уложенных ромбододекаэдров, наиболее близкой по наружному виду к сфере. Такие формы состояются из многогранников по специальному алгоритму, о чем речь впереди, и их различных можно построить бесчисленное множество. На рис.10.3 показано несколько таких форм в разных масштабах, а рядом с каждой указано число N ромбододекаэдров, из которых она собрана. Каждая форма представлена в двух видах – слева взгляд направлен вдоль одного из больших направлений системы, а справа - вдоль среднего направления.

Одной из особенностей данных фигур является то, что их центр объема совпадает либо с центром элемента, находящегося в середине, либо с точкой, в которой сходятся своими острыми вершинами 6 элементов внутри. Это определяет симметрию их наружной поверхности. Если внимательно приглядеться к изображенным формам, то можно заметить наличие в них тех же элементов симметрии, что и у отдельного ромбододекаэдра – три оси 4-го порядка, четыре оси 3-го порядка и шесть осей 2-го порядка (последние на рисунке не очевидны, но на объемных моделях они легко устанавливаются). Кроме этого имеется 9 плоскостей симметрии – на рисунке семь из них рассекают тела по штрихпунктирным прямым.

Поскольку каждому искажающему телу мы ставим в соответствие исходную конфигурацию, будут рассматриваться искажающие тела не произвольного размера, а только те, объем которых кратен объему ячейки системы – эту кратность обозначим N . Да и число N не может быть произвольным, а только членом определенного числового ряда – об этом будет рассказано в главе 4.

После краткого знакомства с исходной конфигурацией рассмотрим процесс искажения системы. Здесь и далее в качестве примера будем брать самую простую из показанных на рис.10.3 конфигураций – первую, с $N=38$.

Итак, представим, что тело, имеющее форму нашей исходной конфигурации, помещено в систему и ориентировано так, что точно вписывается в ее структуру, не искажая ее.

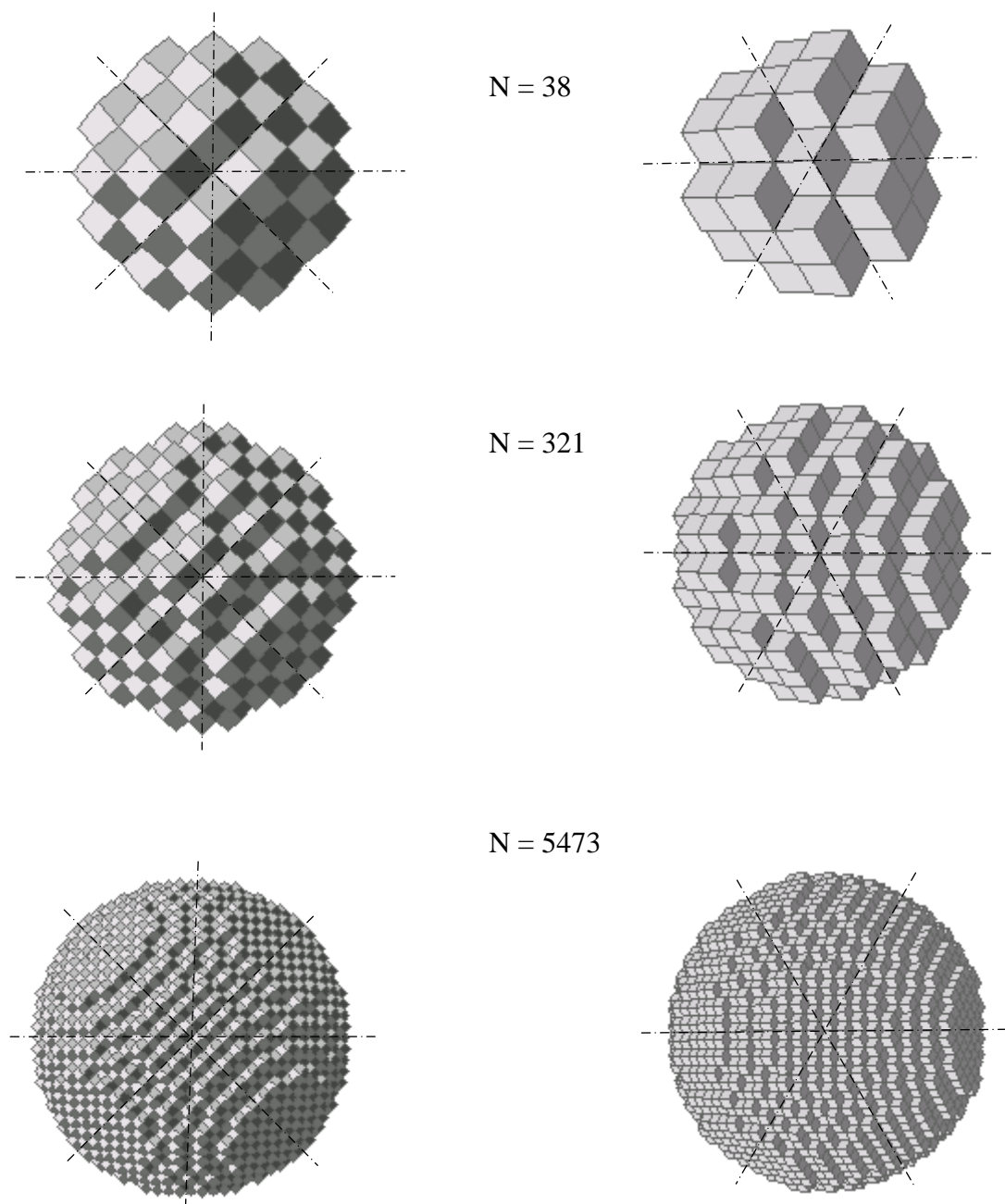


Рис.10.3. Формы, составленные из ромбододекаэдров, близкие к сферической.

Начнем процесс искажения, т.е. преобразование поверхности тела из исходной конфигурации в сферу. Здесь мы вправе представить путь этого преобразования таким, который даст наиболее наглядную картину изменений в системе. Положим, что превращение поверхности тела происходит в два этапа. На первом этапе сглаживаются неровности поверхности, как будто бы срезаются выступы, а освободившиеся объемы перемещаются во впадины. В результате получается выпуклый многогранник – усеченный октаэдр со срезанными короткими ребрами (этот усеченный октаэдр не является полуправильным многогранником – у него на квадратных гранях ребра длиннее, чем на шестиугольных). На втором этапе выпуклый многогранник превращается в сферу. Это двухэтапное преобразование тела показано на рис.10.4.

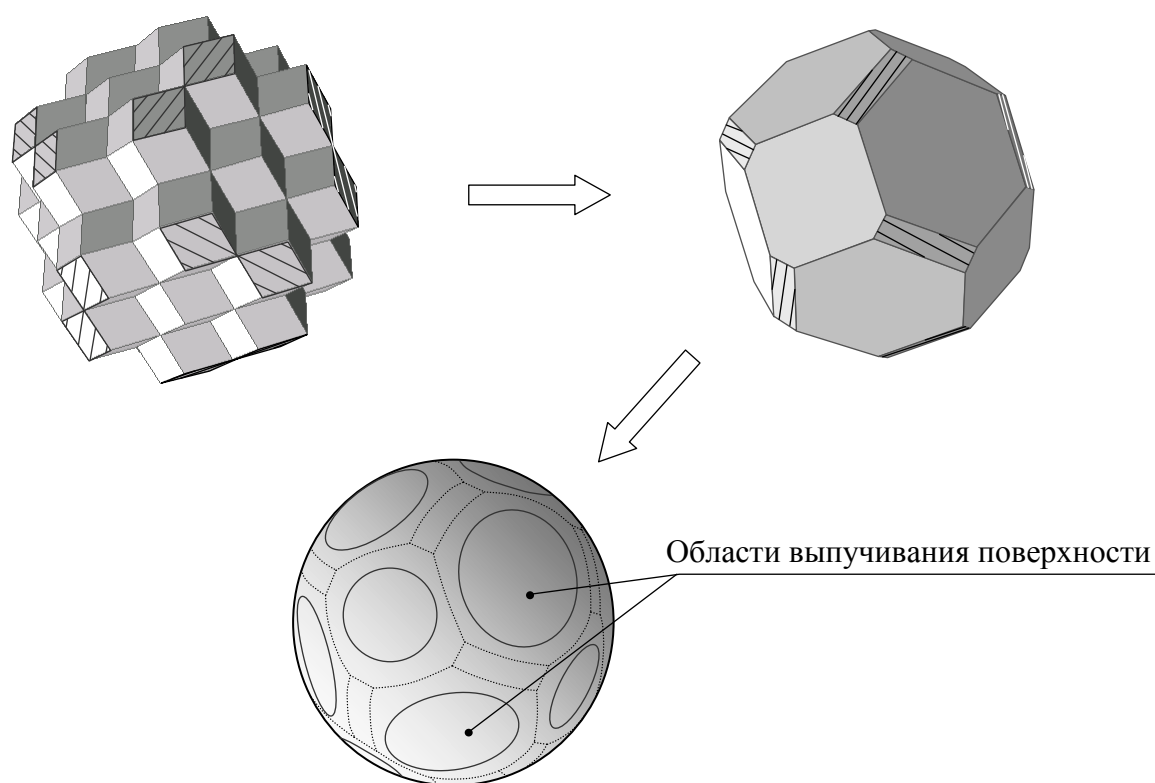


Рис.10.4. Двухэтапное преобразование поверхности искажающего тела.

Теперь выясним, что происходит в системе на каждом из выделенных этапов, и почему мы выделили именно их. Особенность первого этапа заключается в том, что изменения искажающего тела отражаются только на первом слое капель. Все деформации поверхности тела вызывают соответствующие деформации прижатых капель, не сдвигая их с места, поэтому эти деформации не передаются второму слою. При этом важным элементом первого этапа является следующее - плоскости граней исходной конфигурации, заштрихованные на рис.10.4, не смещаются и переходят в грани выпуклого многогранника, отмеченные на рисунке той же штриховкой. Роль этих особых граней в искажении системы будет выяснена в разделе 12, а сейчас просто заметим, что пока эти грани остаются на месте, деформации не выходят за пределы первого слоя. Таким образом, на первом этапе система, начиная со второго слоя, «не знает» об изменении поверхности тела.

Переходим ко второму этапу. Здесь искажающее тело из многогранника превращается в сферу, так же не изменяя объема. При таком преобразовании все вершины и ребра многогранника подтягиваются ближе к центру, а середины граней выпучиваются – на последнем рисунке на сфере отмечены области поверхности, которые выпучились из плоских граней. Такое преобразование поверхности вынуждает капли первого слоя сдвигаться со своих мест – некоторые капли приближаются к центру тела, а другие отодвигаются. Эти смещения передаются каплям второго слоя, и дальше – на всю систему.

Капли первого слоя, уже значительно деформированные до этого, на втором этапе искажаются еще сильнее в результате взаимного смещения. Остальные капли системы

деформируются только от этого смещения, действие которого ослабевает по мере удаления от искажающего тела.

В связи с этим возникает вопрос: как далеко от искажающего тела распространяется вызванное им искажение структуры? Примем гипотезу, что нет такого конечного расстояния, дальше которого система была бы абсолютно не искажена. По нашему мнению, искажение распространяется на любое сколь угодно большое расстояние от искажающего тела, уменьшаясь по какому-то, пока неизвестному, закону.

Посмотрим, как влияет второй этап изменения искажающего тела на форму слоев. На рис. 10.5 показан один слой элементов в неискаженной системе. В глубине его находится жесткое тело в исходной конфигурации. Как видим, расположение элементов здесь напоминает уже знакомый нам кубооктаэдр – многогранник, двойственный ромбододекаэдру – мы его строили в разделе 8. Если вокруг этого слоя нарастить следующий, то, очевидно, он будет иметь такую же форму, только большего размера.

В качестве небольшого отступления отметим следующее. Похоже, что все параллелепипеды обладают таким свойством – если вокруг одного многогранника наращивать слои из таких же тел, то при достаточном количестве слоев они приобретают общую форму многогранника, двойственного исходному. При этом в первый слой включаются многогранники, которые касаются центрального тела только гранями, но не одним ребром, или одной вершиной. Точно так же и второй слой – в него входят тела, касающиеся первого слоя только гранями. Это относится и ко всем остальным слоям.

На рис. 10.5 через центр множества проведены прямые, указывающие большие (Б), средние (С) и некоторые малые (М) главные направления системы. Следует подчеркнуть, что искажение системы не затрагивает ее главных направлений.

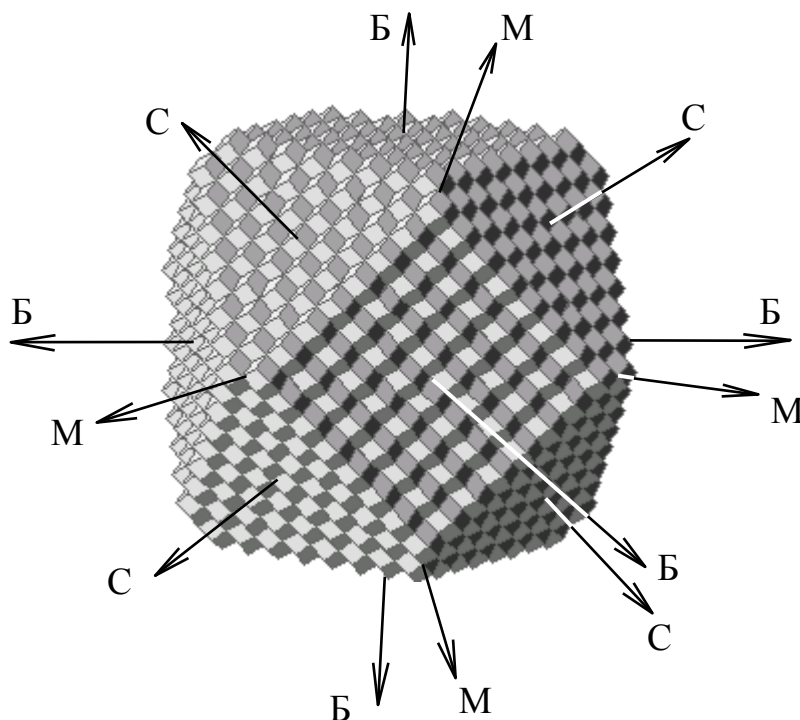


Рис. 10.5. Внешний вид некоторого слоя элементов и обозначение главных направлений системы.

Введем понятие *срединной поверхности слоя*. Определим ее как кусочно-гладкую замкнутую поверхность, проходящую через центры объемов ячеек одного слоя. На рис.10.6 изображена срединная поверхность некоторого слоя в неискаженной системе, где точками отмечены середины ячеек, лежащие на этой поверхности, и показаны их границы.

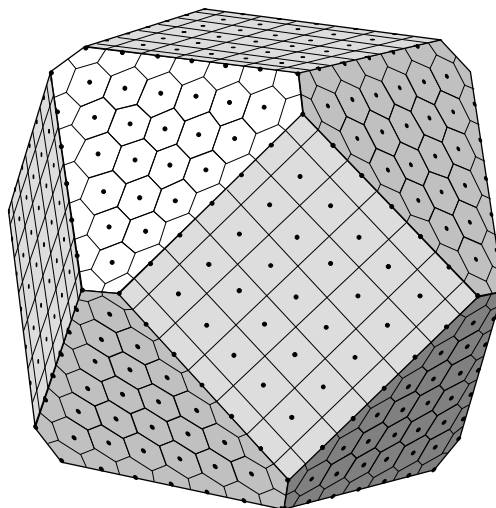


Рис.10.6.Срединная поверхность некоторого слоя до искажения.

Как видим, срединная поверхность неискаженного слоя является поверхностью простого многогранника, только не кубооктаэдра, как мы полагали ранее, а очень близкого к нему усеченного октаэдра (этот усеченный октаэдр – не тот полуправильный многогранник с одинаковыми ребрами, а похожий на него, у которого ребра имеют два вида длин). Короткие ребра, соединяющие квадратные грани этого тела, одинаковы у срединных поверхностей всех слоев и примерно равны длине срезанных ребер у промежуточного многогранника на рис.10.4.

Что же происходит с формой срединной поверхности слоев на втором этапе преобразования искажающего тела? Выпучивание граней тела передается на все слои, и в результате их срединные поверхности тоже немного округляются – на рис.10.7 показана срединная поверхность того же слоя, что и на рис.10.6, но уже в искаженной системе. Это округление, как и вообще все деформации в системе, наиболее выражено вблизи искажающего тела, а с удалением от него постепенно спадает.

Говоря об искажении системы, мы не касались ее степени. Можно ли характеризовать способность искажающего тела влиять на структуру системы какой-либо величиной? Малое искажающее тело размером, скажем, с каплю системы, не может вызвать таких значительных искажений структуры, как большое. Зная, что систему искажает поверхность тела, можно предположить, что степень искажения зависит от площади его поверхности.

Вспомним, что же, собственно, вызывает искажение системы. Искажение возникает в результате изменения формы тела из исходной конфигурации, т.е. в результате перемещения объемов в нем, и чем больше искажающее тело, тем больше величина перемещенного объема при его превращении. Следовательно, искажающая способность тела выражается величиной его перемещенного объема.

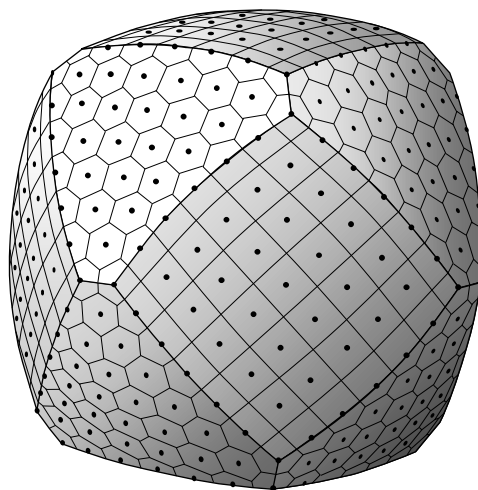


Рис. 10.7. Срединная поверхность слоя после искажения.

Таким образом, если способность искажать систему зависит только от площади поверхности искажающего тела, тогда отношение перемещенного объема V_{π} к площади поверхности S должно быть одинаковым у тел разных размеров. Однако, как показывают расчеты, это не так – на рис.10.8 точками показаны найденные значения отношения V_{π}/S для некоторых искажающих тел, и проведена аппроксимирующая кривая, зависимость которой имеет вид:

$$V_{\pi}/S = 0.146 + 0.045N^{1/3}$$

Как видим, искажающая способность единицы поверхности тела растет линейно от его радиуса. Какая же характеристика формы сферической поверхности изменяется с радиусом? В геометрии известно, что с увеличением радиуса у сферической поверхности уменьшается средняя кривизна - характеристика, с которой мы уже встречались в разделе 2. Следовательно, искажающая способность единицы поверхности тела растет с уменьшением ее средней кривизны. Этот простой вывод нам очень пригодится в дальнейшем.

Изменение деформаций ячеек от слоя к слою приводит к характерным для искаженной системы явлениям. Ранее, обсуждая свойства правильных и полуправильных многогранников, к которым относится и ромбододекаэдр, мы отмечали, что каждый из них имеет минимальную площадь поверхности, пока он не искажен. Это значит, что если ячейка имела форму ромбододекаэдра, то любая ее деформация ведет к увеличению площади поверхности, и, соответственно, индекса. Из этого следуют два важных свойства искаженной системы. Первое – давления в каплях, расположенных вблизи искажающего тела, выше, чем в удаленных. Следовательно, это тело всегда окружено областью повышенного давления. Второе свойство - вблизи искажающего тела капли имеют увеличенную площадь поверхности, поэтому оно является центром области с повышенной энергией.

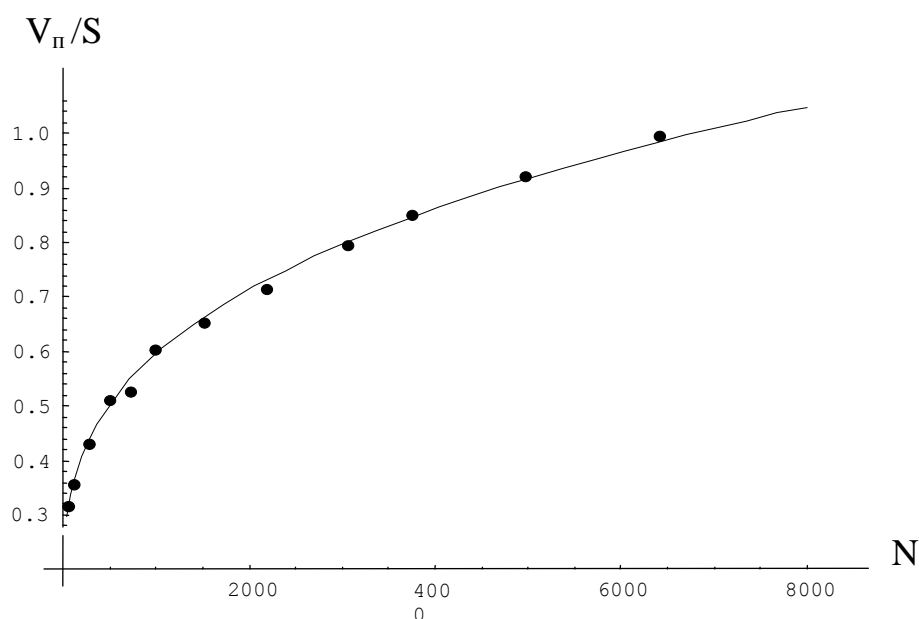


Рис.10.8. Зависимость отношения перемещенного объема к площади поверхности искажающего тела от его размера.

Откуда же берется этот «ореол» дополнительной энергии вокруг искажающего тела? Выше, при описании деформации исходной конфигурации в сферу, мы не рассматривали энергетическую сторону этого процесса. Оказывается, чтобы произошло такое превращение, искажающее структуру системы, необходимо совершить определенную работу, которая зависит от размера тела. Здесь, конечно, имеется в виду только та работа, которая направлена на изменение формы поверхности тела, но нас совсем не интересует часть работы, необходимая для деформации его жесткой внутренности.

В этом смысле было бы правильнее представить искажающее тело не сплошным жестким массивом, а в виде пустотелого механизма, у которого оболочка составлена из подвижных пластин. Пластины эти могут поворачиваться и смещаться относительно друг друга, полностью имитируя изменение поверхности. Если этот механизм запустить без окружающей среды, то на изменение положения его пластин не потребуется никакой энергии (если не учитывать потери на трение). Помещенный же в нашу систему, такой механизм должен совершить работу, чтобы преобразовать свою поверхность из многогранной в сферическую. Именно эта работа и переходит в дополнительную энергию системы в виде увеличения площади поверхности окружающих капель. Назовем ее *работой искажения*. Следовательно, искажающее тело удерживает в пространстве вокруг себя энергию, затраченную на его образование. В одном из следующих разделов будет подробно рассмотрен процесс совершения этой работы.

Обсуждая свойства нашей системы, было бы интересно выяснить следующее – может ли сферическое тело перемещаться среди окружающих его капель, если к нему приложить силу? Если бы такое движение было возможно, то «ореол» дополнительной энергии и область повышенного давления перемещались бы вместе с ним. Менялись бы конкретные капли, составляющие его первый, второй и последующие слои, но все изменения, которые это тело вызывает в системе, сопровождали бы его повсюду.

Чтобы ответить на поставленный вопрос обратимся к науке, изучающей движение тел в материальных средах – аэрогидродинамике. Нам известно, что искажающее тело, находясь в системе, испытывает давление окружающих капель. Ранее было принято, что силы трения между каплями и любыми поверхностями отсутствуют, поэтому никаких других сил, кроме сил нормального равномерного давления на тело не действует. Это тот самый случай, который полностью соответствует условиям так называемого *парадокса Даламбера – Эйлера**. Эти ученые на основе анализа уравнений движения тел получили следующий результат – если на тело, движущееся в среде, действуют только силы нормального равномерного давления, то оно не испытывает никакого сопротивления своему движению с постоянной скоростью. Этот теоретический вывод признали парадоксом только потому, что он не соответствовал ни одному практическому случаю движения тела, всегда испытывающему силу сопротивления. Не смотря на то, что реальное движение в средах не отвечает указанным условиям – всегда есть силы трения, а нормальные давления не всегда бывают равномерными – этот вывод продолжают считать парадоксальным. В нашем же случае данный закон Даламбера – Эйлера действует безукоризненно. Это значит, что жесткое тело, помещенное в систему сжатых капель, будет двигаться в ней свободно, без сопротивления, как будто оно находится в пустоте.

Представим себе, что мы никакими способами не можем обнаружить капли системы, а видим в ней только тело, свободно двигающееся в пространстве. Трудно будет поверить в то, что тело это движется не в пустоте, а среди плотно сжатых капель жидкости. Даже если мы убедимся, что помимо кинетической, оно обладает еще какой-то неизвестной энергией, то, скорее всего, будем считать ее свойством самого этого тела, подразумевая в нем сложную внутреннюю структуру.

Но и кинетическая энергия тела в системе имеет свои особенности. Рассмотрим движение искажающего тела среди капель системы (назовем их здесь частицами среды). При движении тела эти частицы тоже вынуждены перемещаться, освобождая место для его нового положения, и заполняя пространство, которое тело освободило. Теоретически, в это перемещение вовлечены все частицы системы, но в разной степени. Как и следует ожидать, наибольшему перемещению подвержены те из них, которые непосредственно касаются тела – они обтекают его, раздвигаясь перед ним, и смыкаясь за ним. При этом абсолютная скорость частиц в некоторых точках контура тела превышает его собственную скорость.

Перемещения, а, следовательно, и скорость частиц уменьшаются с расстоянием от тела, и только на бесконечности становятся равными нулю. Отсюда следует, что кинетическая энергия объекта, движущегося в среде, состоит из двух слагаемых: первое – кинетическая энергия самого тела, взятого отдельно от среды, и второе – кинетическая энергия движения всех частиц среды, вызванного движением тела:

$$T = \frac{m V^2}{2} + T_{CP}, \quad (10.1)$$

где: T – кинетическая энергия движения тела в среде;

m – масса тела;

V – скорость тела;

T_{CP} – суммарная кинетическая энергия частиц среды.

* Даламбер (Д'Аламбер) Жан Лерон (1717 - 1783) – французский математик, механик, философ. Впервые сформулировал правила составления дифференциальных уравнений движения, применив их к гидродинамике.

Эйлер Леонард (1707 - 1783) – математик, физик, механик, астроном. Родился в Швейцарии, работал в Германии и России. Один из основоположников гидродинамики.

Кинетическая энергия самого тела находится просто, как видно из последней формулы. Сложнее обстоит дело с кинетической энергией частиц, которую они приобрели в результате возмущений, вызванных телом. Чтобы ее найти, надо просуммировать энергии всех этих частиц, учитывая, что скорости у них, вообще говоря, различны.

В аэрогидродинамике, рассматривая движение тела в идеальной жидкости, этот момент упрощают, и кинетическую энергию среды во всем пространстве приводят к кинетической энергии некоторого ее объема K , принимая, что весь он движется со скоростью тела, т.е.:

$$T_{CP} = \frac{K \rho V^2}{2}, \quad (10.2)$$

где: ρ – плотность среды;

V – скорость тела.

Таким образом, всю задачу сводят к движению одного только тела, как будто бы среды нет, а к телу присоединена дополнительная масса, равная $K \cdot \rho$. Поэтому K называют *объемом присоединенной массы*, а отношение $k = K/W$, где W – объем самого движущегося тела, – соответственно *коэффициентом присоединенной массы*.

В книге [4] дан подробный анализ движения в идеальной жидкости, и показано, что коэффициент присоединенной массы не зависит ни от времени, прошедшего от начала движения тела, ни от его скорости, ни от его размеров, а есть величина постоянная для данной формы. Там же посчитано, что для тела в форме шара коэффициент присоединенной массы $k = 1/2$. Это значит, что искажающее сферическое тело, двигаясь в системе, как бы увеличивает свою массу на массу среды, взятой в половине своего объема. Объединяя формулы (10.1) и (10.2), а так же выразив объем присоединенной массы через коэффициент k , и подставив его значение для сферы, получим:

$$T = \frac{(m + \rho W/2) V^2}{2} = \frac{W (\rho_T + \rho/2) V^2}{2}, \quad (10.3)$$

где, как и ранее:

T - кинетическая энергия движения тела;

m – масса тела;

W – объем тела;

V – скорость тела;

ρ – плотность среды;

ρ_T – плотность вещества тела.

Формула (10.3) допускает и другую интерпретацию – при движении тела можно считать, что его плотность возрастает на половину плотности среды.

Сказанное выше о кажущемся увеличении массы тела, проявленном в его кинетической энергии при равномерном прямолинейном движении в среде, справедливо для всех случаев, где проявляются его инерционные свойства. Другими словами, если к неподвижному телу приложить определенную силу, то ускорение, которое оно получит, будет равно отношению величины приложенной силы к увеличенной массе. Поэтому, принятые в физике два определения массы как количество вещества, и как мера инерционности, считающиеся эквивалентными, в нашем случае эквивалентными не

будут. Первая всегда будет меньше второй, правда, если рассматривать только поступательное движение.

Содержание этого раздела, разумеется, не исчерпывает всех свойств искаженной системы. По мере изложения материала мы будем знакомиться с ее новыми свойствами, но сначала нужно подробно рассмотреть геометрические закономерности искаженной структуры. Этим мы и займемся в следующих разделах.

11. Построение формы искаженных ячеек

Ознакомившись с общей картиной искажения системы, выясним, хотя бы приближенно, какую форму имеют ячейки вблизи искажающего тела. Для этого обратимся к преобразованию, описанному в прошлом разделе, когда жесткое граненое тело превращается в сферическое. В начале этого процесса имеем множество неискаженных ячеек системы, и среди них – тело в исходной конфигурации. В конце получаем множество искаженных ячеек и в середине – сферическое искажающее тело.

Примем, как и раньше, исходную конфигурацию с $N=38$ (рис.10.3) и представим, что жесткое тело, имеющее эту форму, помещено в неискаженную систему и ориентировано так, что точно вписывается в ее структуру.

Если через центр этой формы (обозначим эту точку O) провести все 9 плоскостей симметрии, то они разобьют и форму, и все пространство системы, на 48 совершенно одинаковых трехгранных углов с общей вершиной в точке O . При этом ребра у каждого трехгранного угла будут идти по главным направлениям системы – одно ребро - по большому направлению, другое – по среднему, и третье – по малому.

При таком разбиении часть самого тела, а также часть системы, ее структуры, попавшая в один из углов, будет точной копией любой другой такой же части из другого угла, как говорят в геометрии, с точностью до поворота и отражения. И это справедливо как до искажения системы, так и после - в силу того, что искаженная система сохраняет все элементы симметрии, проходящие через центр искажающей сферы, а центр этой сферы – та же точка O . А раз так, то все изменения, происходящие в системе, достаточно проследить только в пределах одного из этих углов, тогда как во всех остальных изменения будут такими же.

Из сказанного следует, что поверхность исходной конфигурации разбивается плоскостями симметрии на 48 одинаковых участков. На рис.11.1 показан пример такого разбиения поверхности сферы на одинаковые прямоугольные сферические треугольники. Буквами на сфере обозначены точки, соответствующие главным направлениям.

Рассмотрим процесс искажения структуры в одном из таких трехгранных углов. Наша исходная конфигурация показана крупно на рис.11.2. Вырежем из нее участок, попадающий в один из описанных углов, как показано на этом рисунке, и изобразим его отдельно на рис.11.3 вместе с примыкающими к нему ячейками капель, не рассекая их.

Как видим, в эту зону попало только 4 ячейки непосредственного окружения (на рисунке они изображены прозрачными), обозначим их номерами 1, 2, 3 и 4. Выясним, какую форму они приняли в искаженной структуре, предполагая, что все грани в процессе искажения остались плоскими.

На граненой поверхности тела проведена ломаная линия DEFG (в этом разделе только главные направления и точки, связанные с ними, обозначены русскими буквами, все остальные обозначения - латинские) – это линия пересечения данной поверхности с поверхностью сферы того же объема, что и тело, и с тем же центром O . То есть это линия пересечения поверхностей тела до и после его превращения в сферу. Ломаная эта делит исходную поверхность на две зоны I и II. Смысл этих зон в том, что когда данная граненая поверхность начнет изменяться, то участки I зоны будут опускаться, а участки II зоны подниматься до тех пор, пока все они не станут одной сферической поверхностью.

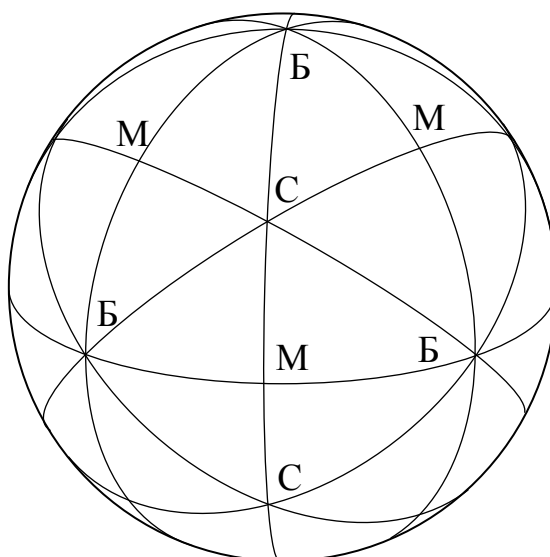


Рис.11.1. Разбиение поверхности сферы плоскостями кубической симметрии, проходящими через центр сферы.

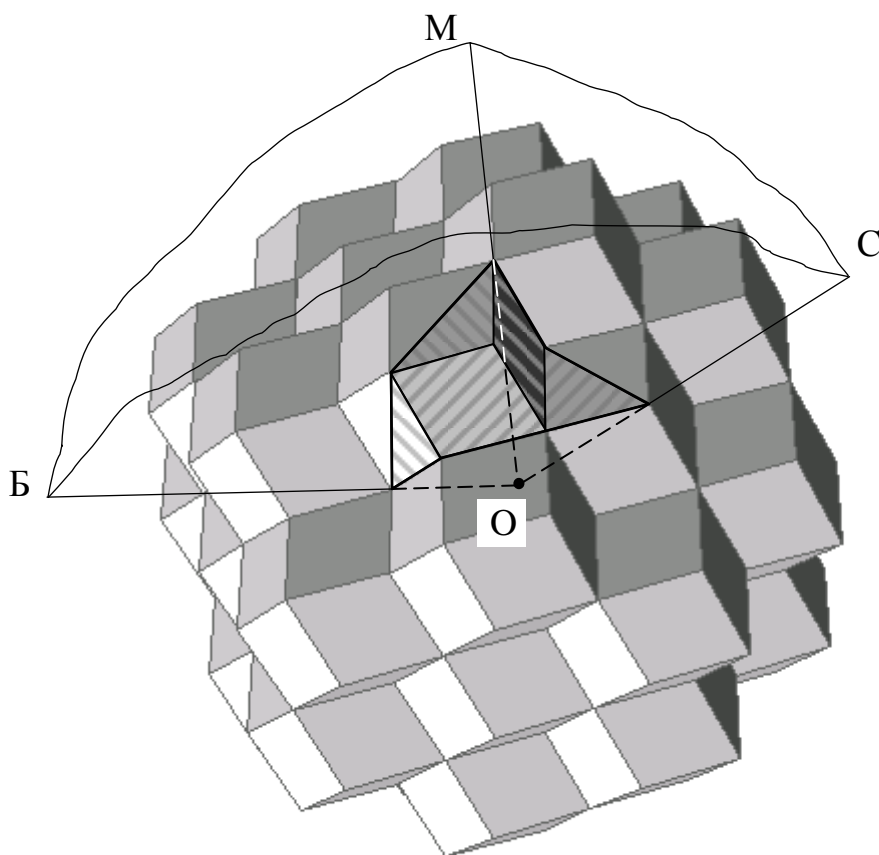


Рис.11.2. Участок исходной конфигурации, вырезаемый трехгранным углом.

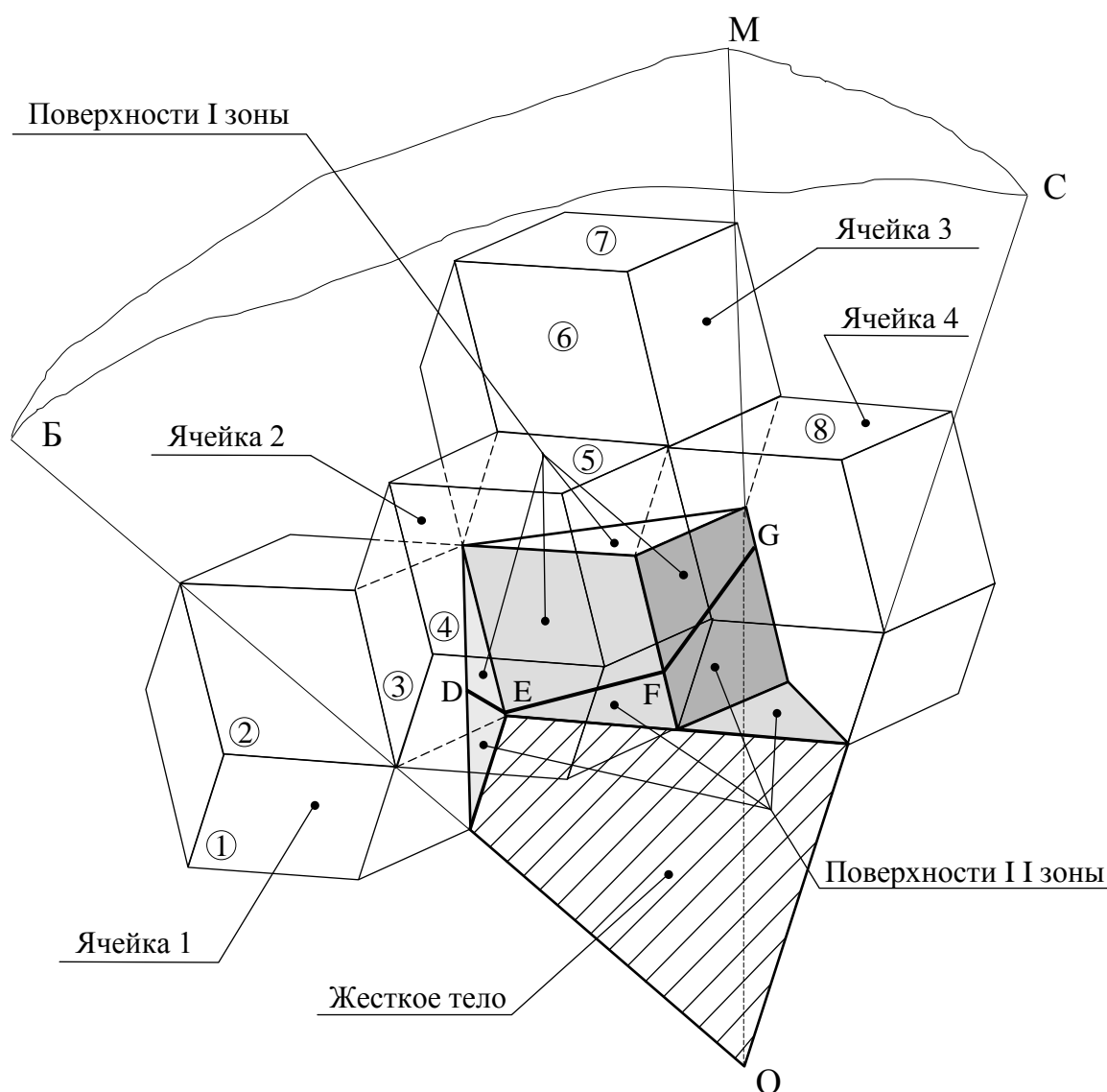


Рис.11.3. Участок поверхности жесткого тела с ячейками первого слоя до искажения

Теперь представим, какие изменения в примыкающих ячейках вызовет это преобразование поверхности. С началом превращения жесткого тела поверхности зоны I будут опускаться, увлекая за собой ячейку 3, и она будет приближаться к центру O, а ячейка 2 при этом тоже немного опустится. В противовес этому, поверхности зоны II, поднимаясь, вытолкнут ячейку 4 вверх, дальше от точки O, а ячейка 1 останется на месте, поскольку одинаково касается обеих зон. Взаимные перемещения жидких тел вызовут их сильную деформацию в условиях, когда сверху на них давят элементы второго слоя, заставляя прижиматься к искажающему телу, одновременно оставаясь в контакте между собой. В результате они приобретут новую форму, которую нам и предстоит выяснить.

Первый и основной вопрос – какой станет у ячеек форма граней, которой они прижимаются к искажающему телу, т.е. как они разделят между собой площадь сферического треугольника, на котором они разместятся после деформации? Чтобы ответить на него, примем некоторые допущения. Во-первых, будем считать, что в результате искажения средняя высота всех ячеек первого слоя, считая от поверхности сферы, станет приблизительно одинаковой. Во-вторых, примем, что давления в каплях

одного слоя равны, поэтому границы между ячейками установятся перпендикулярно поверхности сферы – это следует из правила сопряжения поверхностей.

Из принятых условий получим, что у ячеек равного объема будут одинаковыми и площади оснований – площади граней, которые лежат на искажающей сфере. Тогда задача сводится к разбиению сферы на участки одинаковой площади, взаимное расположение которых соответствует взаимному расположению ячеек первого слоя.

Чтобы построить разбиение сферы на искомые участки, необходимо знать положения точек – центров тяжести площадей этих участков. В качестве таких точек подойдут проекции центров объемов ячеек первого слоя на поверхность сферы. Но мы не знаем положения этих центров в искаженной системе, т.к. неизвестна конфигурация искомых ячеек – получается замкнутый круг. Разорвать его позволяет то обстоятельство, что в процессе искажения центры объемов ячеек в большей мере смещаются в радиальном (относительно центра искажающей сферы) направлении, и меньше – в сторону. Это позволяет для первого приближения получить требуемые точки, спроектировав на поверхность сферы центры ячеек первого слоя, где они были до искажения.

При построении разбиения сферы следует использовать правило сопряжения поверхностей жидкости каплей. В данном случае оно выражается в том, что углы смежных участков, сходящиеся в одной точке, должны быть одинаковыми – этого требует равенство давлений в каплях одного слоя, что мы приняли выше.

Заданный набор исходных данных и условий позволяет решить задачу разбиения поверхности сферы алгоритмически методом последовательных приближений. Выполненное программой искомое разбиение изображено на рис.11.4, где выделен сферический треугольник B_1, C_1, M_1 , на котором мы рассматриваем весь процесс (индекс 1 означает, что точки относятся к первому слою). Мы предполагаем, что именно такой вид будут иметь грани ячеек, прижатые к искажающему телу. Таким образом, найден ответ на первый вопрос – о форме нижней грани ячеек, изображенных на рис.11.3, после деформации. Боковые грани этих ячеек, по которым они соприкасаются между собой, проводим перпендикулярно поверхности сферы, как ранее условлено.

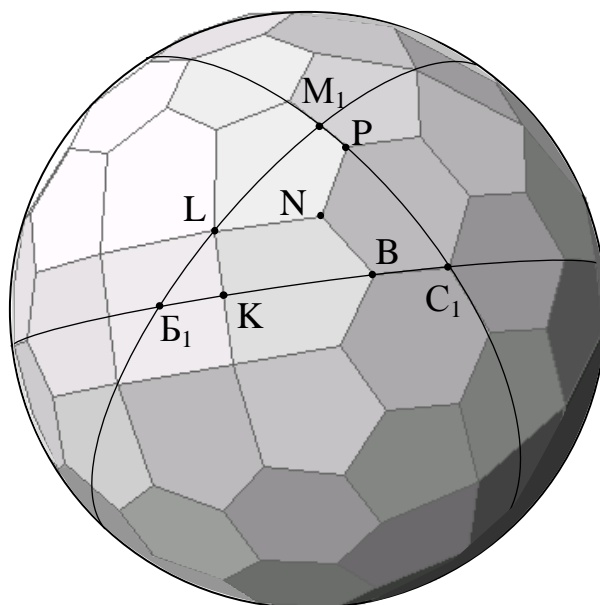


Рис.11.4. Разбиение искажающей сферы на участки, занимаемые ячейками первого слоя.

Дальше возникает следующий вопрос – как построить верхнюю часть этих ячеек, то есть, по каким граням они соприкасаются с ячейками второго слоя? Чтобы это выяснить, проведем вокруг искажающей сферы вторую сферическую поверхность, concentричную первой, так, чтобы она пересекала все элементы второго слоя, и спроектируем на нее центры элементов этого слоя из точек, где они были до искажения. При этом к элементам второго слоя относим те из них, которые соприкасаются гранями с элементами, отнесенными к первому слою, а их положения относительно жесткого тела известны.

Продолжая построение, разбиваем поверхность новой сферы по тому же принципу, что и первую. На рисунке 11.5 дано это разбиение – оно показывает границы между ячейками второго слоя искаженной системы (вторая сфера показана такого же размера, что и первая, хотя на самом деле она значительно больше). Точки B_2 , C_2 , M_2 обозначают треугольник, который вырезается на сфере второго слоя трехгранным углом БСМ с вершиной в точке О.

Следует обратить внимание на то, что такое построение для второго слоя нестрогое – правильнее было бы для него провести не сферу, а такую замкнутую поверхность, которая пересекала бы элементы второго слоя, например, в их серединах. Такая поверхность нам известна – это срединная поверхность искаженного слоя, но построить ее мы пока не можем, хотя в этом и нет необходимости, поскольку нашей задачей является приближенное определение формы ячеек.

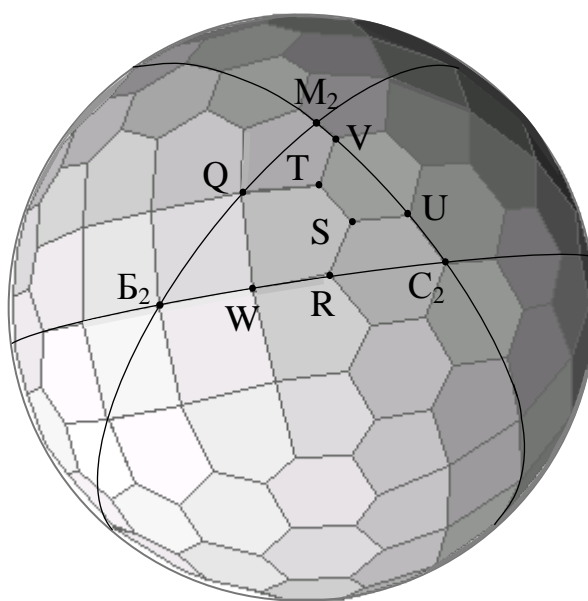


Рис.11.5. Разбиение сферы на участки, соответствующие элементам второго слоя.

Теперь, зная взаимное расположение границ ячеек первого и второго слоев, можно их наложить и окончательно построить форму ячеек первого слоя после деформации - они показаны на рис.11.6. Там же обозначены точки, соответствующие разбиениям сфер на предыдущих двух рисунках. На рисунках 11.3 и 11.6 одинаковыми цифрами в кружках обозначены некоторые соответствующие друг другу грани.

Таким образом, весь первый слой состоит из найденного набора форм ячеек. Главное их различие заключается в очертаниях нижней грани – четырехугольная, пятиугольная и шестиугольная (не обязательно правильные). Данный признак положим в основу классификации форм ячеек искаженной системы, и будем называть их *четырёхугольный вид*, *пятиугольный вид* и *шестиугольный вид*. Забегая вперед, отметим, что в искаженной системе других видов не бывает, хотя эта классификация практически применима только к ячейкам первых двух – трех слоев, а дальше она теряется.

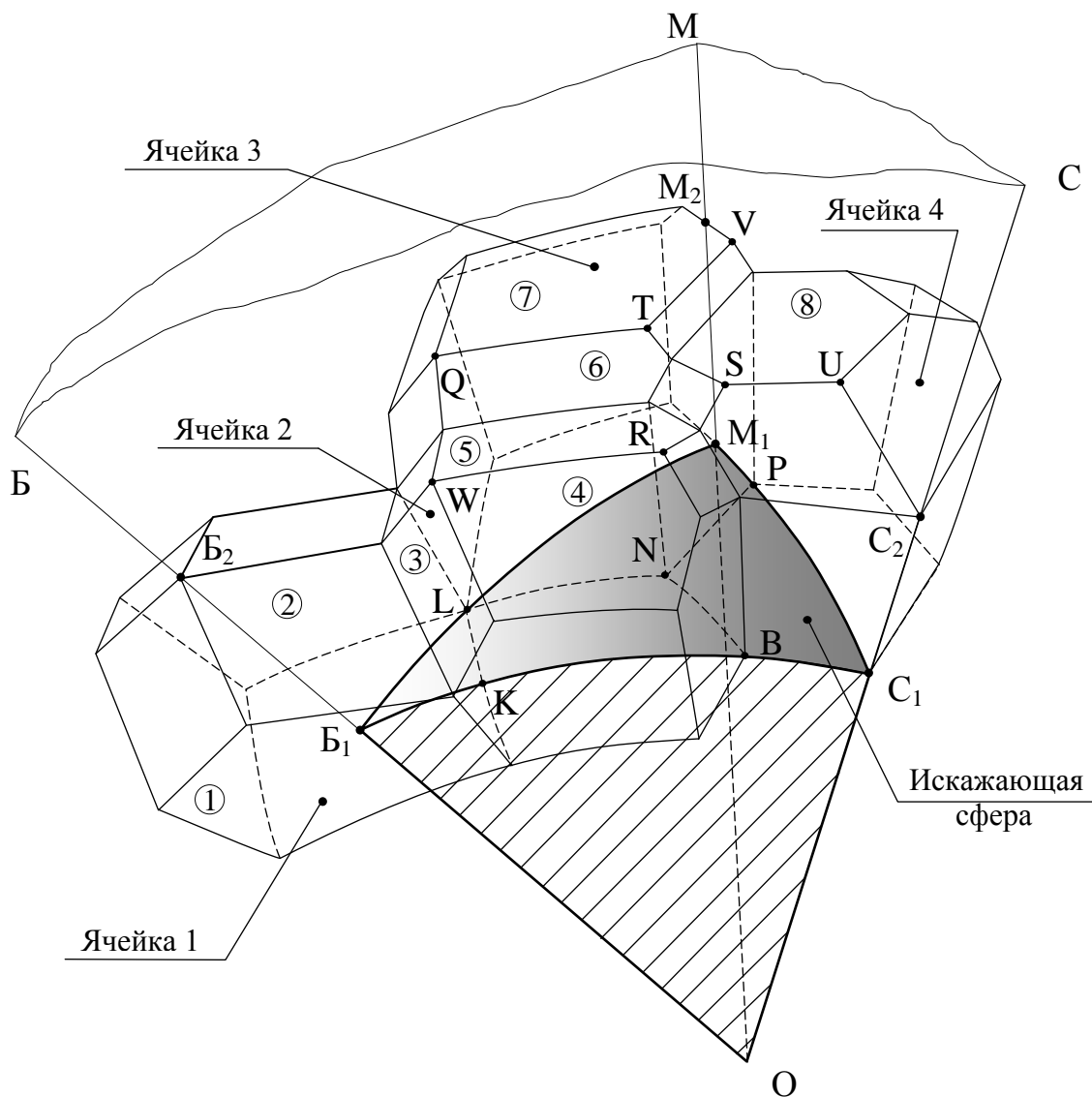


Рис.11.6. Участок искажающей сферы с ячейками первого слоя.

Элементы, составляющие первый слой, имеют одну особенность, которая отличает их от всех остальных – часть их поверхности формируется непосредственным контактом жесткого искажающего тела, поэтому они не могут быть типичными представителями элементов искаженной структуры. В отличие от них, обычные элементы системы со всех сторон окружены такими же каплями, и вся их форма устанавливается условиями совместной деформации. Поэтому, чтобы увидеть ячейки, полностью сформированные окружающими каплями, необходимо построить хотя бы второй слой элементов. Такое построение, выполненное тем же способом, что и предыдущее, показано на рис.11.7. Из

него видно, что главное отличие ячеек второго слоя состоит в том, что нижняя часть у них не плоская (кроме ячейки 7), как у первого слоя, а состоит из нескольких граней. Чтобы применить к ним ранее введенную классификацию форм (четырёхугольная, пятиугольная, шестиугольная), нужно представить, что мы прижимаем их нижними гранями к плоскости, тогда эти грани сольются в одну, форма которой и определит вид ячейки.

Построения, которые мы здесь выполнили, позволили нам представить картину участка системы, примыкающего к искажающей сфере. Какие общие закономерности они выявили? Сравнивая рис.11.3 и 11.6 видим, что форма ячеек сильно изменилась, и эти изменения выражаются главным образом в повороте плоскостей граней относительно исходного положения.

Ранее, до деформации, каждая грань лежала на своей граневой плоскости, идя по одной из которых, мы попадали на грань другой ячейки, третьей и т.д. (см. раздел 9). Сейчас же, если взять плоскость любой грани произвольной ячейки, на ней уже не будет лежать никакая грань другой ячейки (кроме случайного совпадения). Таким образом, ранее существующие граневые плоскости после искажения «рассыпались» на участки каждой отдельной грани.

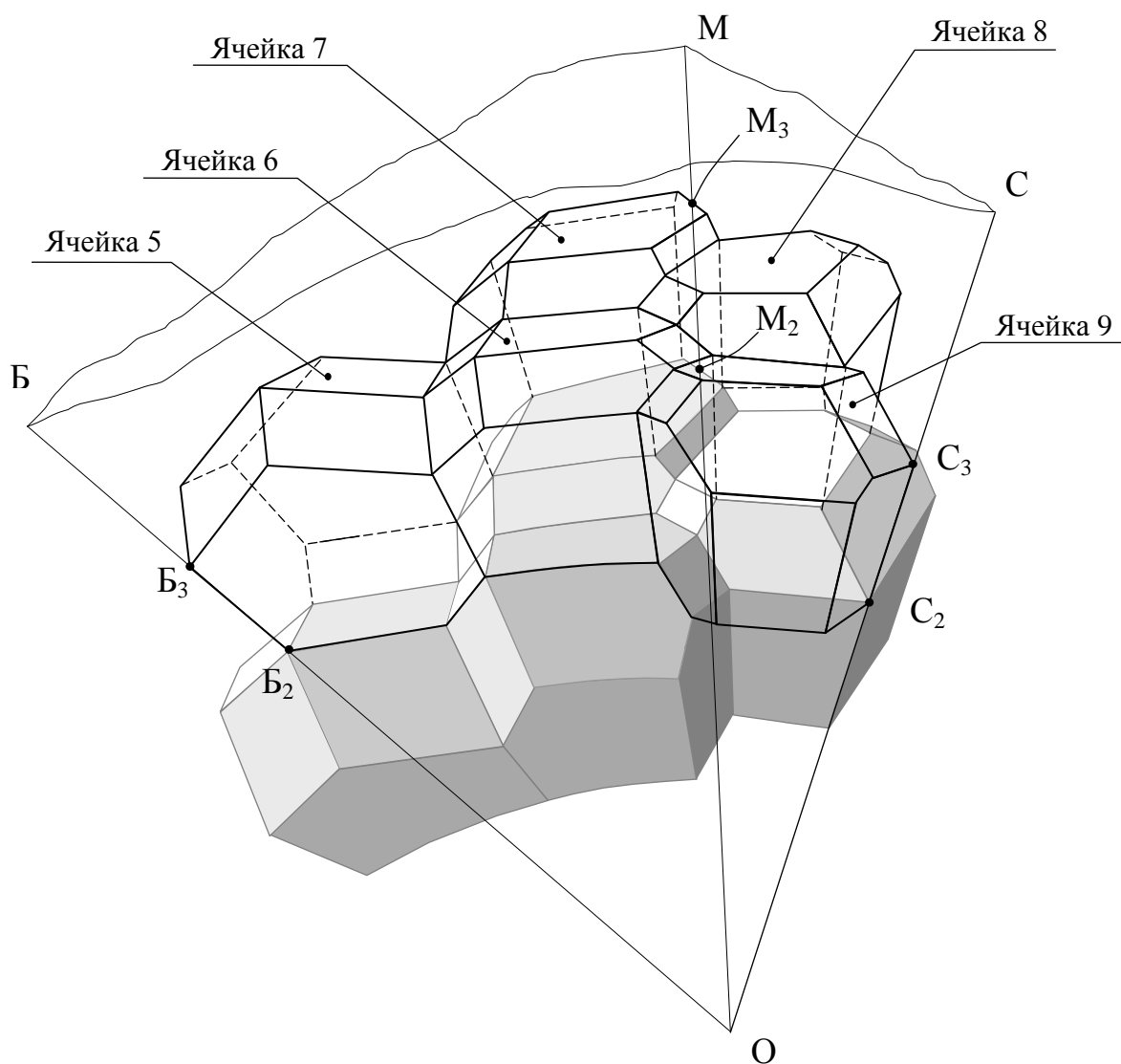


Рис.11.7. Построение ячеек второго слоя.

Второй особенностью изменения формы является то, что у некоторых ячеек появились новые грани. Выясним, как они образовались. Если взглянуть на рис. 11.7, то можно заметить, что у каждой ячейки нижняя часть уже, чем верхняя, чего не было до искажения. Это вызывает «наползание» некоторых ячеек наружного слоя на те ячейки внутреннего слоя, с которыми раньше у них не было контакта, что приводит к образованию дополнительных граней. Это явление заметно проявляется в начальных слоях и быстро угасает с удалением от искажающего тела.

Очевидно, структура искаженной системы подчиняется каким-то, пока неизвестным геометрическим законам, которые и определяют форму ячеек. Если мы выясним эти законы, то сможем построить форму любой искаженной ячейки независимо от ее положения и расстояния до искажающего тела, и сделать это сможем не приближенно, как выше, а вполне точно. Это даст возможность моделировать все физические явления, происходящие в системе при искажении.

12. Геометрические закономерности искаженной структуры

Прежде, чем приступить к обсуждению этой важной темы, определим понятие «структура системы». Раньше мы использовали это сочетание слов в общем смысле, подразумевая под ним просто «рисунок» заполнения пространства. Сейчас определим его более конкретно - структурой системы будем называть закон расположения множества точек – центров объемов ячеек.

Чтобы описать взаимное расположение точек в пространстве, необходимо знать общую закономерность их расположения, если такая закономерность существует. Так, неискаженная структура нашей системы очень просто описывается кубической гранецентрированной решеткой, в узлах которой лежат центры ячеек. Но если в систему внести искажение, все ее элементы сместятся с прежних мест, центры ячеек уйдут от периодического расположения, и уже никакая решетка не будет соответствовать такой структуре. В данном случае ее изменение выражается просто: «была решетка, стала нерешетка», и все. Но такая неинформативность нас не устраивает – нужно не только описать структуру, но и выяснить, как и насколько она изменилась от искажения, т.е. способ описания не должен зависеть от изменений, происходящих в системе.

Подход к такому описанию нам подсказывает рассмотрение ячеек по слоям относительно искажающего тела. При этом все множество центров ячеек распадается на подмножества, каждое из которых принадлежит одному слою.

Такое же разбиение центров ячеек на подмножества можно выполнить и в неискаженной системе, где рассматриваются слои вокруг тела в исходной конфигурации. В этом случае на решетчатом расположении точек вводится новый способ их организации - послойный. Но здесь есть одна особенность - разделение на слои в неискаженной системе охватывает не все узлы решетки – центры ячеек, место которых занимает жесткое тело, не войдут в эти разбиения.

Чтобы обойти это затруднение, будем начинать построение слоев не от поверхности исходной конфигурации, а от ее центра, как показано на рис. 12.1 – геометрически это возможно, если исходная конфигурация имеет центр симметрии, что мы и принимаем. Тогда реально не существующие слои, как будто расположенные внутри конфигурации, будем называть *фиктивными слоями* - они нам потребуются в дальнейших расчетах. Таким образом, мы получаем способ описания структуры системы, не зависящий от ее состояния.

Наглядное представление об исследуемой структуре дает форма срединных поверхностей слоев. Эти поверхности, по определению, проходят через центры объемов ячеек, входящих в слой, поэтому изменение структуры легко проследить по изменению формы этих поверхностей.

Из раздела 10 известно, что в неискаженной системе срединные поверхности имеют вид усеченных октаэдров с плоскими гранями, а после искажения эти грани становятся выпуклыми (рис. 10.6, рис.10.7). Причина таких изменений, безусловно, лежит в самом искажающем теле, и сейчас мы выясним, каким образом оно влияет на форму срединных поверхностей слоев.

На рис. 12.2 а изображено искажающее тело в исходной конфигурации, для наглядности совмещенное со сферой, в которую оно превратилось (здесь взята та же исходная конфигурация, что и раньше, составленная из 38 ромбододекаэдров). От некоторых граней этого тела отходят стрелки вдоль малых направлений системы. На рисунках 12.2 б – д показаны последовательные слои, у каждого из которых проведены стрелки в тех же направлениях, отходящие от угловых ячеек.

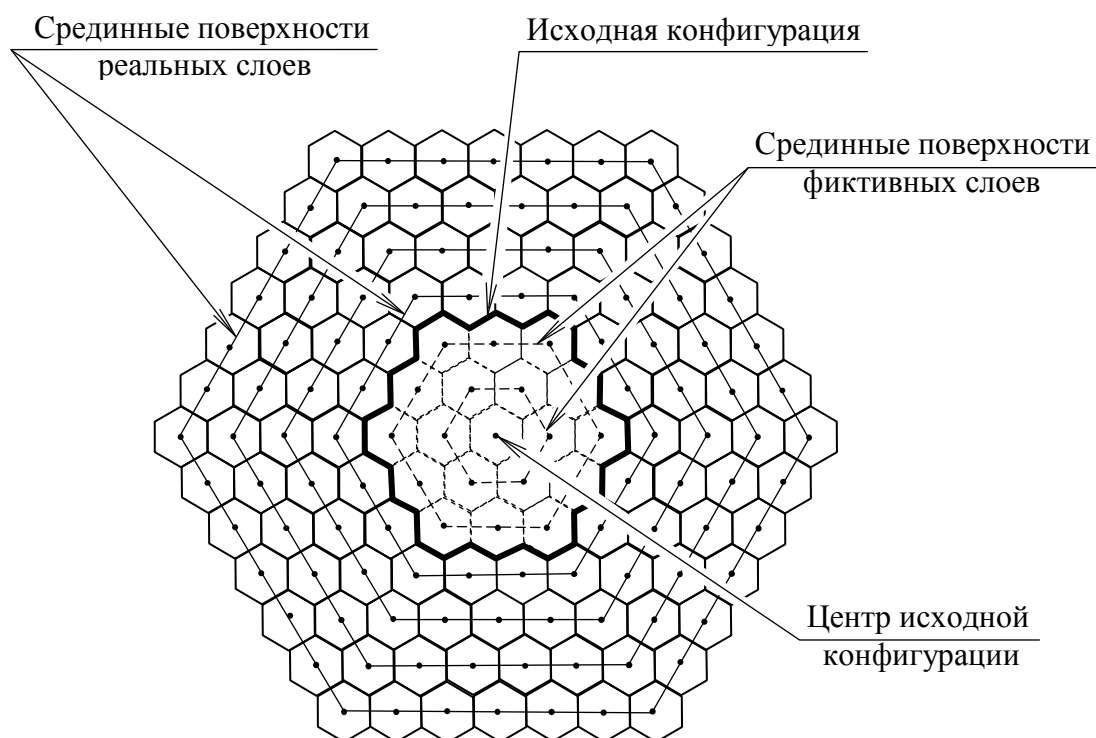


Рис. 12.1. Послойное представление структуры системы.

Если выбрать какое-либо одно направление стрелки и проследить за расположением ячеек, отмеченных одинаковой стрелкой во всех слоях, то можно заметить, что эти ячейки выстраиваются в две рядом идущие цепочки, которые все более удлиняются с каждым новым слоем. Две такие цепочки, идущие в одном из направлений, показаны на рис. 12.3.

Теперь снова посмотрим на исходную конфигурацию. Когда она превратится в сферу, и все ее грани лягут на сферическую поверхность, начала наших цепочек придвинутся ближе к центру сферы, увлекая за собой все свои элементы (элементами цепочки будем называть ячейки, которые в нее входят, в отличие от названия «элемент системы», которое мы применяем для отдельной капли). Но эти элементы являются вершинами многогранников-слоев, поэтому от смещения цепочки каждая вершина немного «провалится» внутрь своего слоя. Это не может не отразиться на общей форме каждого слоя – если его вершины придвинулись к центру, а объем слоя вместе с его содержимым не изменился, то весь он должен немного округлиться, а его срединная поверхность принять бочкообразную форму.

Полезно отметить, что преобразование формы, какое мы видим на рисунке 10.7, где смещение вершин многогранника к центру вызвало его общее округление, возможно только, если содержимое этого тела оказывает сопротивление сдвигу.

Мы выяснили только причину округления слоев, а теперь займемся его величиной. Для этого рассмотрим одну из цепочек, изображенных на рис.12.3 и найдем зависимость перемещения каждого ее элемента от номера слоя, которому он принадлежит. Сечение жесткого тела и одной из цепочек показано на рис.12.4. Пронумеруем элементы цепочки, начиная с 1 – эти номера соответствуют номерам слоев, в котором находится элемент.

Когда исходная конфигурация превратится в сферу, начало цепочки переместится на расстояние ΔS_0 влево, а вся цепочка растянется на эту величину, поскольку правый ее конец уходит в бесконечность, и, можно считать, неподвижен. Попутно заметим, что

величина ΔS_0 является константой исходной конфигурации, и у разных конфигураций она различна.

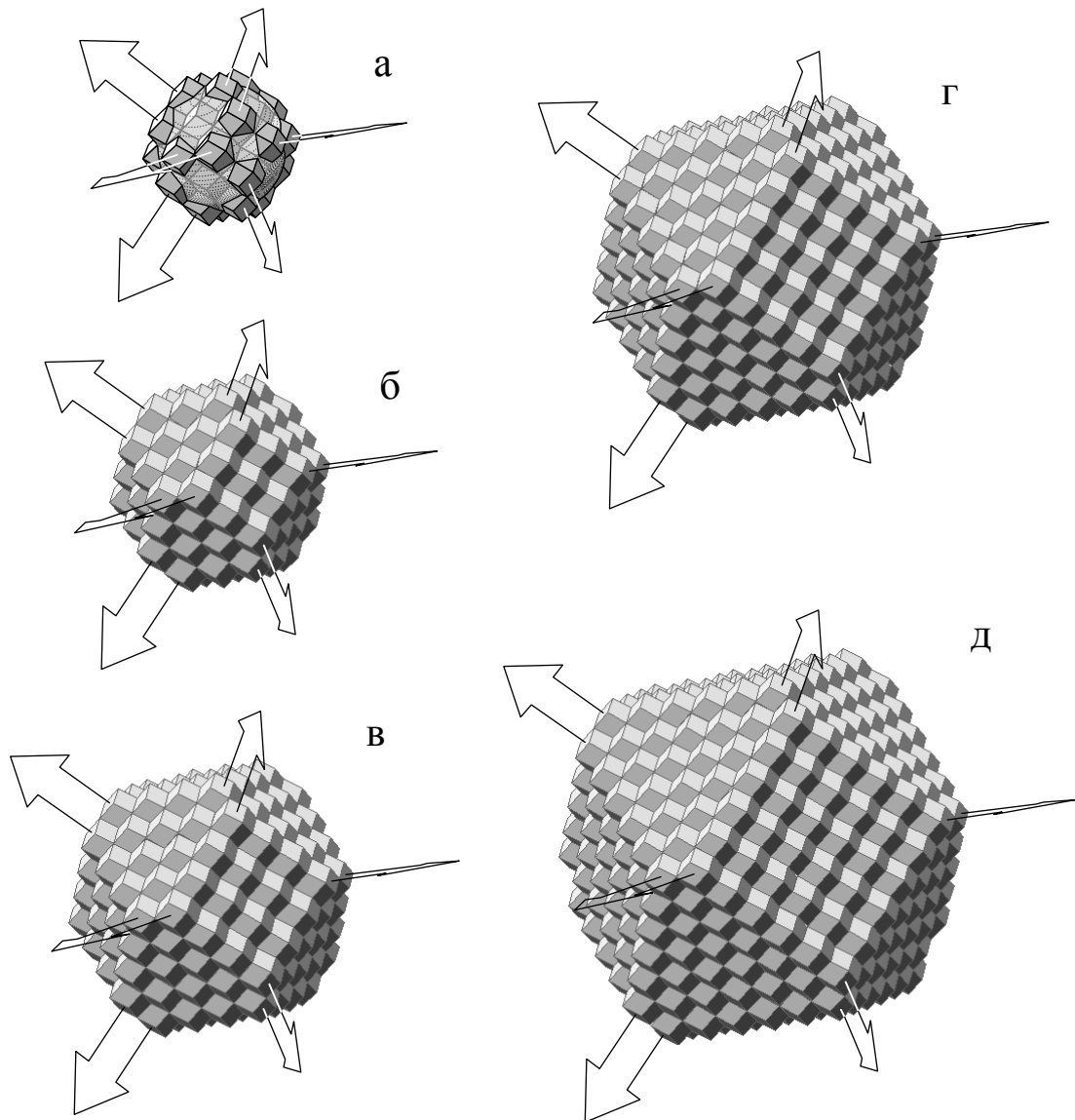


Рис.12.2. Последовательность формирования слоев.

Если цепочка удлиняется, то это значит, что каждый ее элемент растягивается в этом направлении на некоторую величину ΔL_i и, надо полагать, у всех элементов это удлинение разное. В результате этих удлинений все элементы цепочки смещаются ближе к искажающему телу, о чем уже говорилось.

Условимся считать величиной перемещения самого элемента перемещение его центра. Если удлинение первого элемента цепочки обозначить ΔL_1 , то его перемещение будет:

$$\Delta S_1 = \Delta S_0 - \frac{\Delta L_1}{2}$$

Аналогично перемещение второго элемента:

$$\Delta S_2 = \Delta S_0 - \Delta L_1 - \frac{\Delta L_2}{2}$$

Перемещение третьего элемента:

$$\Delta S_3 = \Delta S_0 - \Delta L_1 - \Delta L_2 - \frac{\Delta L_3}{2}$$

Таким образом, перемещение n-го элемента цепочки можно выразить формулой:

$$\Delta S_n = \Delta S_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta L_i - \frac{\Delta L_n}{2} \quad (12.1)$$

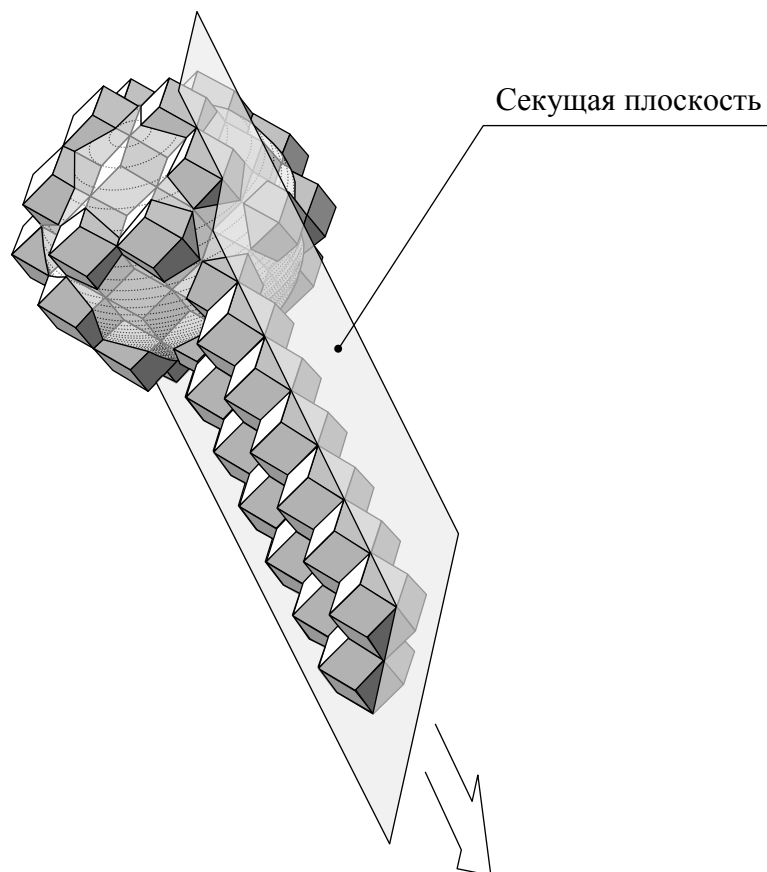


Рис.12.3. Две цепочки элементов, отходящие от исходной конфигурации.

Как видим, перемещения элементов зависят от удлинений, которые нам неизвестны. Но как изменяются удлинения элементов цепочки с удалением от искажающего тела? Очевидно, что удлинения должны уменьшаться - с удалением от источника искажений деформации ячеек гаснут. Следовательно, для выражения удлинений необходимо найти такую убывающую монотонную функцию, которая стремилась бы к нулю при неограниченном возрастании аргумента. В то же время, у этой функции сумма значений для всех целочисленных аргументов до бесконечности должна быть конечным числом – необходимость этого вскоре станет понятной.

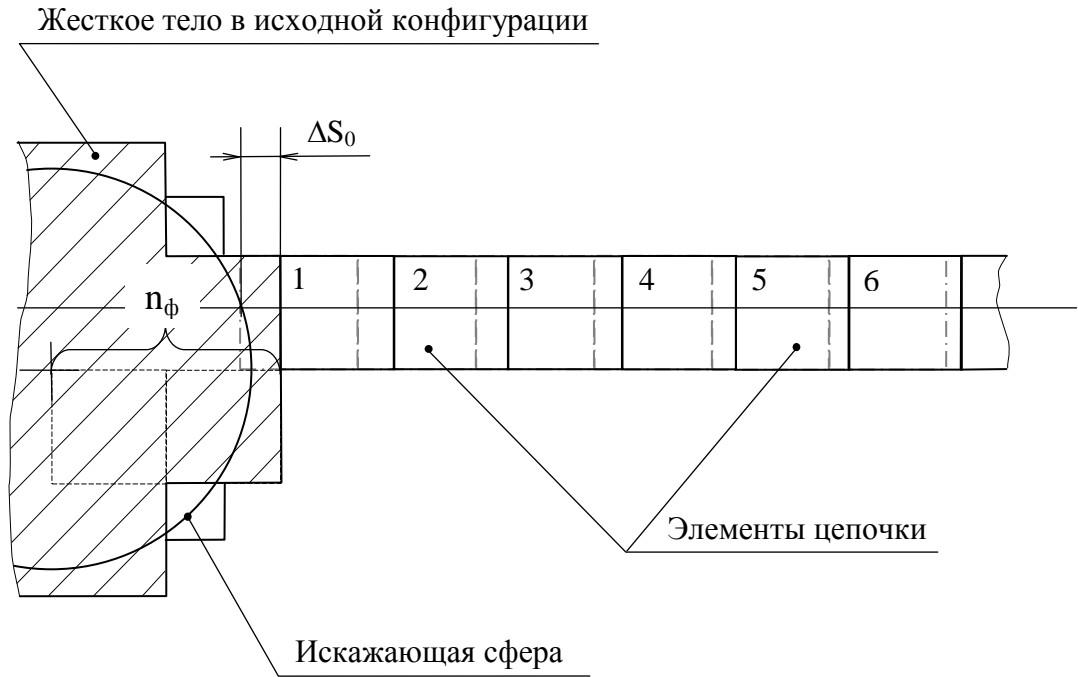


Рис.12.4. Сечение жесткого тела и одной из цепочек плоскостью, показанной на рис. 12.3.

Одной из функций, которая удовлетворяет указанным требованиям, может быть такая:

$$f(i) = \left(\frac{1 + n_{\phi}}{i + n_{\phi}} \right)^p,$$

где: i – номер элемента цепочки;

n_{ϕ} – число фиктивных элементов между центром искажающего тела и началом цепочки (рис.12.4);

p – некоторый показатель степени.

Условие конечности суммы значений этой функции для всех целочисленных аргументов выполняется при $p > 1$, но, как показали дальнейшие исследования, необходимо, чтобы этот показатель был как можно меньше, поэтому приближенно примем $p = 1.01$, и тогда удлинение i -го элемента цепочки выразим так:

$$\Delta L_i = \Delta L_1 \left(\frac{1 + n_{\phi}}{i + n_{\phi}} \right)^{1.01} \quad (12.2)$$

Заметим, что величина n_{ϕ} в этих выражениях равна уже знакомому нам числу фиктивных слоев, и является константой исходной конфигурации. Кроме этого выяснилось, что точное значение показателя p не имеет существенного значения.

Чтобы найти удлинение первого элемента ΔL_1 поступим следующим образом – представим величину растяжения цепочки как сумму удлинений всех ее элементов, считая цепочку бесконечной длины:

$$\Delta S_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta L_i \quad (12.3)$$

Подставив сюда (12.2), получим:

$$\Delta S_0 = \Delta L_1 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1+n_\phi}{i+n_\phi} \right)^{1.01} \quad (12.4)$$

Обозначим сумму в этом выражении $Fs(n_\phi)$ – она, как уже говорилось, конечна, и выразим искомую величину:

$$\Delta L_1 = \frac{\Delta S_0}{Fs(n_\phi)} \quad (12.5)$$

Подставив это выражение в (12.2), а результат подстановки – в (12.1), получим окончательное выражение перемещения n-го элемента цепочки, которое он получит при искажении системы:

$$\Delta S_n = \Delta S_0 \left(1 - \frac{1}{Fs(n_\phi)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1+n_\phi}{i+n_\phi} \right)^{1.01} + \frac{1}{2} \left(\frac{1+n_\phi}{n+n_\phi} \right)^{1.01} \right) \right) \quad (12.6)$$

Анализируя это выражение, отмечаем, что с увеличением номера n значение суммы во вторых скобках приближается к величине $Fs(n_\phi)$, оставаясь всегда меньше ее, следовательно перемещение элемента уменьшается с ростом n, стремясь к нулю.

Мы получили зависимость перемещения ячеек, расположенных в вершинах слоев, от номера слоя. Далее полагаем, что при искажении каждая грань срединной поверхности принимает форму участка сферы радиусом R_r . Найдём зависимость указанного радиуса от номера слоя. Для этого возьмем срединную поверхность произвольного n-го слоя до искажения, и разобьем полученный многогранник на четырнадцать отдельных пирамид с вершиной в центре данного тела – как показано на рис.12.5 а. Наибольшее расстояние между короткими ребрами обозначим D_n , а наибольшее расстояние между вершинами – $2 H_n$.

Теперь представим, что произошло искажение системы. В результате этого цепочки, отходящие от искажающего тела, сдвинулись к центру, а наибольшее расстояние между короткими ребрами многогранника стало равным (обозначение размеров после искажения будем помечать штрихом):

$$D'_n = D_n - 2 \Delta S_n, \quad (12.7)$$

где: ΔS_n – перемещение центра углового элемента слоя – формула (12.6).

При этом грани многогранника округлились, сохраняя прежний объем.

Строго говоря, объем внутри срединной поверхности слоя после искажения должен немного увеличиться. Это можно увидеть, если вновь обратиться к рисунку 10.6. В объем изображенного тела входят ячейки, заполняющие внутренность слоя, плюс половинки ячеек данного слоя, рассеянные плоскими гранями поверхности, плюс части ячеек,

лежащие на ребрах и вершинах. Рассматривая эту же поверхность в искаженном виде (рис.10.7), находим, что в ее объем входят те же составляющие, с той лишь разницей, что части ячеек, лежащие на ребрах и вершинах, стали чуть больше из-за раскрытия двугранных углов от выпуклости граней.

Итак, все боковые ребра пирамид, на которые мы разбили наш многогранник, в результате искажения укоротились с размера H_n до размера H'_n - как показано на рис.12.5 б (здесь изображены только две пирамиды – квадратная и шестиугольная). Поскольку объем всего многогранника при этом почти не изменился (точнее - чуть-чуть увеличился), основания пирамид стали выпуклыми, и радиус этих выпуклостей можно найти, приравняв объемы всего тела до и после искажения с учетом указанной добавки.

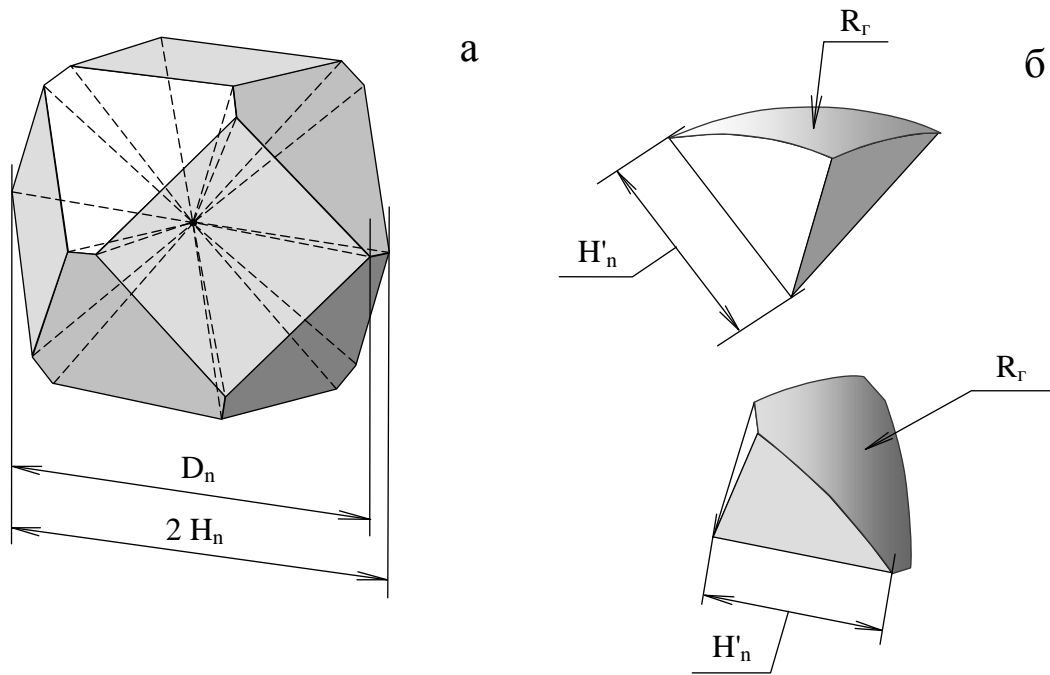


Рис.12.5. К определению радиуса округлений срединной поверхности n-го слоя.

Мы не будем приводить здесь этот, в общем несложный, но довольно кропотливый расчет, а только приведем его результаты. Аппроксимация полученных значений простыми функциями дала следующие зависимости от номера слоя:

- радиус округлости срединной поверхности n-го слоя для искажающего тела объемом N :

$$R_r(n) = -1.28 + 0.641 N^{1/3} + (2.45 - 617 N^{-2} - 2.77 N^{-1/4}) n + (0.086 + 6.55 N^{-1/2}) n^2 \quad (12.8)$$

- расстояние между короткими ребрами срединной поверхности:

$$D'_n(n) = -1.12 + 1.22 N^{1/3} + 2.25 n \quad (12.9)$$

Зависимости (12.8) и (12.9) вполне определяют форму срединных поверхностей слоев. Отсюда становится ясной основная часть картины общего расположения центров ячеек после искажения – они лежат на найденных поверхностях. Остается невыясненным вопрос – как эти центры распределены по срединной поверхности.

В прошлом разделе при построении ячеек мы заметили, что в результате искажения их центры сместились главным образом в радиальном (относительно центра искажающего тела) направлении. Поэтому можно принять, что новые положения центров ячеек находятся на пересечении выпуклой срединной поверхности и отрезков, проведенных из центра искажающего тела через их старые положения.

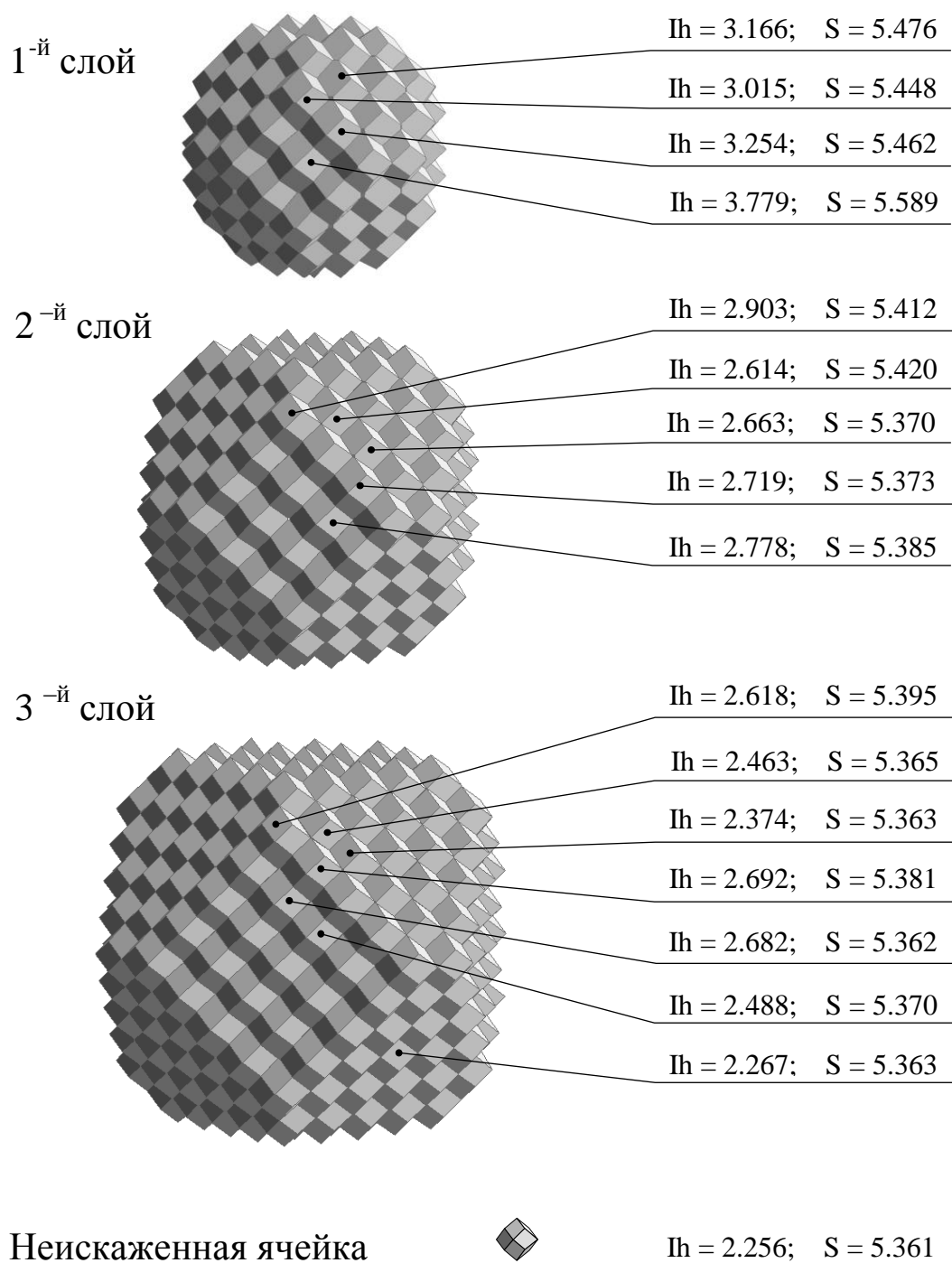


Рис. 12.6. Слои ячеек искаженной системы.

Разобравшись с положениями центров ячеек в искаженной системе, мы, на основании этого, еще ничего не можем сказать о форме самих ячеек. Если вспомнить неискаженную систему, то там ячейки можно было построить, зная только положение их центров –

каждая соседняя пара соединялась отрезком, и через его середину проводилась плоскость, перпендикулярно этому отрезку. Множество таких плоскостей разбивало все пространство на ячейки Дирихле – Вороного, каковыми и являлись ячейки капель.

В этом разбиении оказывается существенным то, что общая грань смежных ячеек перпендикулярна отрезку, соединяющему их центры. Только в этом случае ячейки имеют минимальную площадь поверхности, что соответствует минимуму энергии системы. Это следует из одного условия минимальности площади поверхность многогранника – его вписанный шар должен иметь диаметр, наибольший из возможных, для данного объема и при данном расположении смежных многогранников, что и обеспечивается в нашем случае.

В искаженной системе ячейки так же стремятся иметь как можно меньшую площадь поверхности, поэтому здесь принцип построения ячеек остается тем же – через середины отрезков, соединяющих соседние центры, проводим плоскости, перпендикулярные этим отрезкам. Плоскости эти разделят пространство на многогранники, каковыми и являются искаженные ячейки. Таким образом, в искаженной системе ячейки так же остаются ячейками Дирихле-Вороного, построенными для центров капель. Проведенные построения искаженных ячеек обеспечивают, в пределах некоторых погрешностей, их одинаковый объем.

На рисунке 12.6 показан внешний вид трех первых искаженных слоев вокруг тела объемом $N = 38$, и для некоторых ячеек проставлены значения индекса I_h и площади поверхности S . Внизу для сравнения представлена неискаженная ячейка. Численные значения получены при степени сжатия $C = 20$ стандартной системы. Как видим, в первом слое ячейки имеют наибольший индекс и площадь поверхности, а с увеличением номера слоя эти значения уменьшаются, но все же оставаясь больше, чем в неискаженной ячейке. Подобные построения для других искажающих сфер показывают, что чем больше сфера, тем сильнее искажения ячеек в этих слоях.

Несмотря на большую работу, проделанную нами в этом разделе для определения форм искаженных ячеек, мы должны признать, что в результате получили не совсем то, что искали. Описанное здесь разбиение пространства искаженной системы на равновеликие многогранники не дало нам истинных форм ячеек, а только помогло приблизиться к их определению. Окончательно мы решим эту задачу в следующем разделе.

13. Истинная форма искаженных ячеек. Повышение давления вокруг искажающего тела

В конце прошлого раздела приведены геометрические характеристики ячеек, расположенных вокруг искажающего тела (рис.12.6). Вполне закономерно, что искажение увеличило их поверхность и индекс, но сейчас важно обратить внимание на другое – у стоящих рядом ячеек величина индекса различна. Тогда, согласно выражению (4.11), давления в этих каплях тоже должны быть разными. Если это так, то их поверхность контакта не может быть плоской – она прогнется в сторону, где индекс, а следовательно – и давление, меньше. Мы же, определяя форму ячеек, исходили из того, что все они являются многогранниками с плоскими гранями и находили, как сейчас выясняется, не истинную их форму, а *плоскогранную*. На самом деле таких ячеек в искаженной системе быть не может – это физическая абстракция, благодаря которой стало возможным подойти к определению их истинных форм, где грани искривлены от разности давлений.

Как же происходит формирование искривленных граней? Подобный процесс мы уже рассматривали в разделе 6, когда две капли были помещены в контейнер с непараллельными боковыми стенками. В искаженной системе происходит нечто похожее. Представим, что первое мгновение после искажения все грани ячеек остались плоскими, и величина давления в каждой капле установилась согласно индексу ее ячейки – где больше индекс, там больше давление. В следующий момент разность давлений в каждой паре соседних капель вызвала прогиб поверхности контакта, что привело к изменению их формы.

Далее рассмотрим только одну пару смежных ячеек с их поверхностью контакта. Грань ячейки с большим давлением стала выпуклой, а это, как мы уже знаем, привело к уменьшению ее индекса и, соответственно, к уменьшению в ней давления. У второй ячейки произошло обратное – общая грань стала вогнутой, что вызвало увеличение ее индекса и давления. В результате этих изменений первоначальная разность давлений в каплях понизилась, уменьшив прогиб их общей поверхности. Это уменьшение вновь несколько увеличило разность давлений, а это опять привело к увеличению прогиба, и т.д. В конце концов, форма поверхности общей грани установилась в равновесное состояние. Это значит, индексы ячеек приняли такое значение, что разность давлений в них стала соответствовать данной величине прогиба – конфигурации ячеек и давления в них пришли к равновесию.

Мы описали процесс установления прогиба граней как затухающие колебания. На самом деле таких колебаний при искажении не происходит – давления в каплях и их конфигурации устанавливаются сразу в нужное состояние.

Как же определить истинные формы ячеек? Найденные ранее плоскогранные ячейки дали нам только каркасы их реальных форм, на которые осталось «натянуть» соответственно прогнутые поверхности. Такое представление допустимо, если пренебречь тем, что у многогранника с искривленными гранями должны быть искривлены и ребра. Мы же не будем учитывать искривление ребер, т.к. это значительно усложнит расчет, но при небольших прогибах мало повлияет на результат.

Благодаря этому упрощению, каждую грань ячейки можно представить как пленку, натянутую на плоскую рамку, и прогнутую от разности давлений. Правильнее будет рассматривать не одинарную пленку, а двойную, т.к. в реальности изгибаются одновременно две прижатые друг к другу поверхности капель. Для определения их прогиба нужно лишь знать разность давлений, какая действует на пленки, но разность давлений, как мы знаем, определяется индексами ячеек, которые сами зависят от прогиба.

Таким образом, решение задачи для отдельной ячейки требует знания параметров ячеек ее окружающих, а у тех, в свою очередь, свое окружение, которое тоже нужно учитывать, привлекая более широкое множество элементов, и т.д. Значит, выделить одну

ячейку и определить для нее давление и прогиб граней, не вовлекая в это всю систему, невозможно.

Выход можно найти только программным моделированием общего процесса установления давлений во всех каплях системы. Конечно, имея ограниченные вычислительные ресурсы, одновременно вовлечь в расчет можно только конечное число ячеек, но и при этом всегда можно обеспечить достаточную точность.

Сейчас мы кратко опишем алгоритм моделирования процесса установления давлений в каплях нескольких слоев, окружающих искажающее тело. Прежде всего, заметим, что давление в капле зависит линейно от величины коэффициента поверхностного натяжения жидкости, поэтому примем в расчете $f = 1.0$, а реальные давления всегда можно найти, умножив полученные значения на реальную величину f .

Далее, зададим степень сжатия системы, для которой выполняется расчет - примем, например, $C = 20$. Из (9.5) находим давления в каплях неискаженной системы, или, что то же самое – давления в каплях искаженной системы, бесконечно удаленных от искажающего тела:

$$P_{\infty} = \frac{20 * 1.0}{1.2407} = 16.12$$

Как вы заметили, мы нигде не указываем размерности величин. Размерности эти будут зависеть от принятых базовых единиц измерения длины и силы. Если вспомнить раздел 9, то там численное значение объема одной капли принято равным единице, и от того, какую размерность этой единице приписать, зависит принимаемая размерность длины:

$$\langle \text{ед. длины} \rangle = \langle \text{ед. объема} \rangle^{1/3}$$

Размерность силы определяется принятой размерностью коэффициента поверхностного натяжения жидкости и размерностью длины:

$$\langle \text{ед. силы} \rangle = \langle \text{ед. коэфф. пов. натяж.} \rangle * \langle \text{ед. длины} \rangle$$

Теперь, если установлены базовые размерности, единица давления определяется как обычно:

$$\langle \text{ед. давления} \rangle = \frac{\langle \text{ед. силы} \rangle}{\langle \text{ед. длины} \rangle^2},$$

а единица работы и энергии:

$$\langle \text{ед. энергии} \rangle = \langle \text{ед. силы} \rangle * \langle \text{ед. длины} \rangle.$$

Продолжим описание расчета давлений в каплях. Из выражения (9.13) находим объем ячейки при данных условиях:

$$P = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(0.687 + 0.560 \left(\frac{1.2407}{20} \right)^{2.29} \right)^3 = 1.0043$$

Рассматривая неискаженную ячейку как простой ромбододекаэдр, из выражения (8.10) по найденному объему определяем длину ребра $t = 0.688$, а по формуле (4.8) – индекс ячейки, бесконечно удаленной от искажающего тела – $Ih_{\infty} = 2.256$ (r_0 определяется из выражения (9.1')).

Выбираем исходную конфигурацию искажающего тела и находим при помощи моделирующей программы форму плоскогранных ячеек в искаженной системе, как

описано в предыдущем разделе, стараясь включить в расчет как можно большее число слоев.

Далее приступаем к определению давлений. Вначале принимаем давление во всех каплях $p' = p_\infty$, а прогиб всех граней - нулю, и входим в цикл, в котором последовательно выполняем действия для всех ячеек, участвующих в расчете:

1. Находим индекс ячейки с учетом прогиба граней - Ih' ;
2. Находим давление в капле по формуле (4.18):

$$p'' = p_\infty \sqrt{\frac{Ih'}{Ih_\infty}} ;$$

3. Сравниваем полученное значение p'' с принятым в предыдущем цикле p' . Если у всех капель они различаются на достаточно малую величину, то расчет заканчиваем и выходим из цикла;
4. Принимаем новое значение давления: $p' = p' + k(p'' - p')$,
где: k – число, подбираемое опытным путем при расчете: $0 < k < 0.3$;
5. Находим прогиб граней и двугранные углы на ребрах ячейки;
6. Если пройдены все ячейки, переходим на п.1.

Во время расчета можно заметить, что давления в каплях с каждым циклом растут, но вскоре рост этот замедляется, и затем прекращается совсем. Это означает, что достигнуто искомое равновесие форм ячеек и давлений.

В приведенном алгоритме пункт 5 записан просто: «Находим ... двугранные углы на ребрах ячейки». Несмотря на простоту формулировки, задача эта довольно сложная, и требует отдельного описания найденного принципа ее решения.

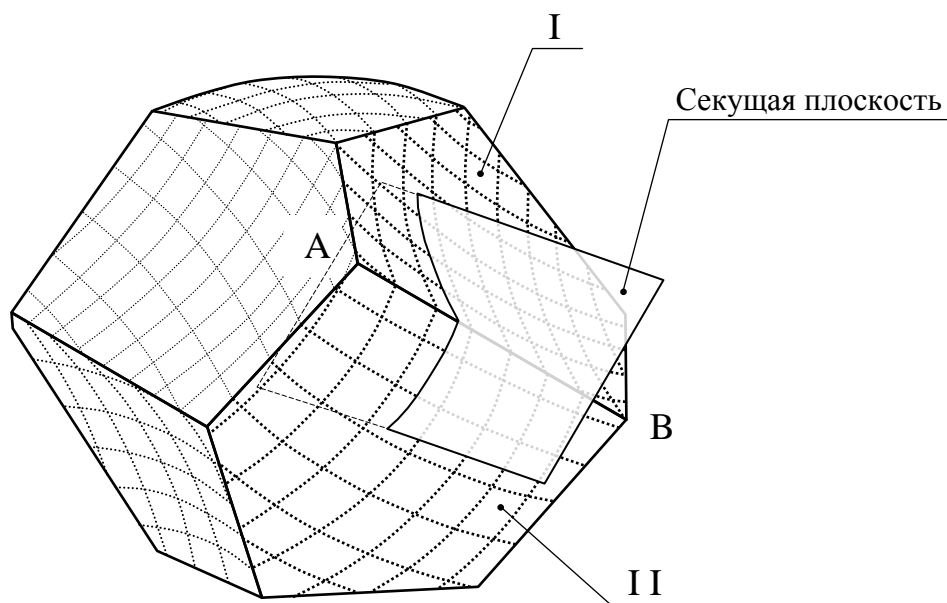


Рис.13.1. Многогранник с изогнутыми гранями.

Возьмем некоторый многогранник с изогнутыми гранями (рис.13.1) и выберем на нем произвольное ребро АВ с примыкающими гранями I и II. Если провести несколько сечений перпендикулярно этому ребру (одна секущая плоскость показана на рисунке), то окажется, что величина двугранного угла в сечениях разная. Представим величину α этого переменного угла в виде суммы:

$$\alpha = \alpha_0 + \beta_I + \beta_{II}, \quad (13.1)$$

где: α_0 - двугранный угол на ребре АВ в плоскогранном многограннике;

β_I - переменный угол наклона сечения грани I к плоскости контура при подходе к ребру АВ;

β_{II} - переменный угол наклона сечения грани II к плоскости контура при подходе к ребру АВ.

На рис.13.2 показано одно из таких сечений. Знаки углов β_I и β_{II} принимаем согласно знакам кривизны граней (раздел 2): у выпуклой грани – положительный, у вогнутой – отрицательный.

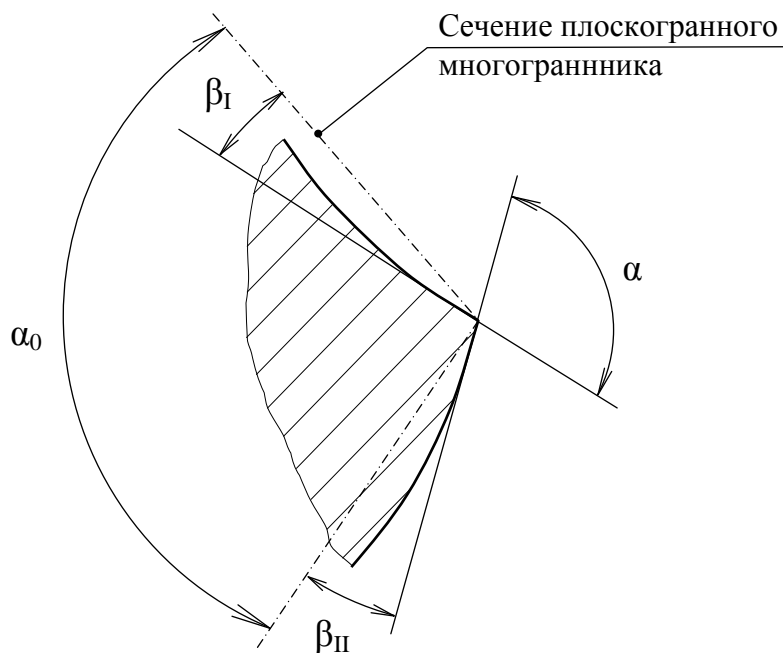


Рис.13.2. Сечение двугранного угла с изогнутыми гранями.

Для точного определения закона изменения каждого из этих углов по длине ребра, необходимо знать аналитическое выражение поверхностей граней. Вообще говоря, такие выражения находят, решая дифференциальное уравнение прогиба упругой пленки, ограниченной плоским контуром, и находящейся под действием равномерного давления. Однако, аналитическое решение этой задачи в общем виде возможно только для самых простых форм контура. Для более сложных форм применяют приближенные численные методы, которые в результате многократных итераций дают частное решение для одного набора исходных данных.

Понятно, что в нашем случае, когда контуры граней - произвольные многоугольники, а давления все время меняются, многократное повторение расчетов каждой грани численными методами делают задачу моделирования практически невыполнимой. Следует так же учесть, что при тех допущениях, которые мы изредка делаем, высокая точность расчетов теряет смысл. Поэтому для нашего случая применим более простой, быстрый, хотя и менее точный способ. Суть его состоит в следующем. Поскольку знание двугранных углов на ребрах ячейки необходимо для определения ее индекса, для приближенного решения этой задачи вместо переменных углов β_I и β_{II} в формуле (13.1) будем искать некоторые постоянные средние углы β_I^{cp} и β_{II}^{cp} . Определяются они так.

Представим, что упругую пленку, находящуюся снизу под давлением Δp , закрепили на горизонтальной плоскости прямолинейными планками, которые образуют замкнутый n-угольник со сторонами l_1, l_2, \dots, l_n . Если площадь этого многоугольника обозначить S , то вертикальная сила, отрывающая пленку от плоскости, очевидно, равна $\Delta p \cdot S$. Эта сила воспринимается всеми сторонами контура так, что выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^n F_i^y = \Delta p S, \quad (13.2)$$

где: F_i^y - вертикальная сила, воспринимаемая i-ой стороной многоугольника.

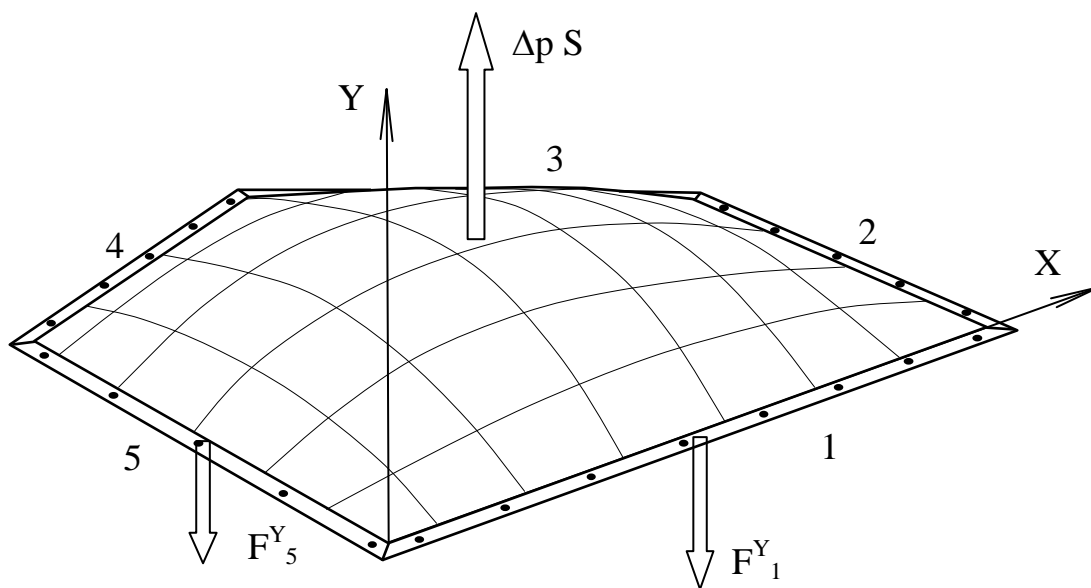


Рис.13.3. Пленка под давлением, закрепленная на горизонтальной плоскости.

Рассмотрим участок пленки, примыкающий к одной, например, к 1-ой стороне контура, и направим ось X вдоль этой стороны – как показано на рис.13.3. Пленка передает свою силу натяжения этой стороне, подходя к плоскости контура в каждой точке прямой под разными углами. При этом полная вертикальная сила, воспринимаемая этой стороной, равна:

$$F_1^y = 2f \int_0^{l_1} \sin \beta_1(x) dx, \quad (13.3)$$

где: f – удельная сила натяжения пленки;

$\beta_1(x)$ – переменный угол наклона пленки к плоскости контура в месте ее закрепления на стороне 1.

При этом горизонтальную составляющую от натяжения пленки, действующую на сторону контура, не рассматриваем. В последнем выражении величина f – аналог коэффициента поверхностного натяжения жидкости, поэтому принимаем, что она одинакова во всех точках нашей пленки. Кроме этого, двойка, стоящая множителем в правой части, означает, что согласно сказанному ранее, наша пленка не одинарная, а двойная.

Если в выражении (13.3) заменить переменный угол $\beta_1(x)$ некоторым средним β_1^{cp} , то оно примет вид:

$$F_1^y = 2f l_1 \sin \beta_1^{cp} \quad (13.4)$$

Отсюда величина этого среднего угла:

$$\beta_1^{cp} = \arcsin \frac{F_1^y}{2f l_1} \quad (13.5)$$

Тогда, чтобы определить этот угол, достаточно найти силу F_1^y , воспринимаемую первой стороной контура. Представим ее равной силе давления на некоторый участок пленки, который можно «приписать» к этой стороне. Отсюда встает задача – разделить между сторонами всю площадь многоугольника так, чтобы выполнялось условие – каждая сторона контура воспринимает только ту вертикальную силу, которая образуется на «ее» участке пленки.

По какому же принципу провести это разделение? Требуемое условие будет выполняться, если между участками пленки не будет передаваться вертикальная сила. Для этого ее надо разделить по линиям, исходящим из углов контура, в каждой точке которых касательная к поверхности пленки, перпендикулярная этой линии, будет расположена горизонтально. Только в этом случае силы натяжения пленки, действующие между участками, будут идти параллельно плоскости контура, и не будут иметь вертикальной составляющей. Чтобы построить эти линии, нужно знать точную форму поверхности пленки, но этого мы как раз и стараемся избежать. Следовательно, необходимо найти простой способ разделения пленки на требуемые участки.

Выполним такое построение – проведем биссектрису одного из углов многоугольника контура и рассечем пленку вертикальной плоскостью, проходящей через эту биссектрису. Если мы посмотрим на линию пересечения пленки с данной плоскостью, то увидим, что вблизи угла контура эта линия отвечает требуемым условиям – пленка разделена по ней на две симметричные части. Однако чем дальше от угла отходит линия расщепления, тем больше ее отклонение от истинной границы участков.

Приближенность нашего способа состоит в том, что за искомое разбиение пленки на участки, «приписанные» каждой стороне контура, мы принимаем ее разбиение плоскостями, перпендикулярными контуру, и проходящими через биссектрисы его углов, как показано на рис.13.4, где дан вид сверху на пленку. Мы не будем останавливаться на деталях этого построения, заметив только, что оно аналогично построению вида сверху крыши здания, когда все ее скаты имеют одинаковый наклон.

Такое разбиение легко выполняется алгоритмически для любого многоугольника и, кроме того, его требуется провести только один раз за весь расчет.

Обозначим площади участков разбиения соответственно сторонам, к которым они относятся: S_1, S_2, \dots, S_5 . Тогда искомая сила F_1^y в выражении (13.5) будет равна $\Delta p \cdot S_1$, а средний угол наклона пленки на этой стороне:

$$\beta_1^{cp} = \arcsin \frac{\Delta p S_1}{2f l_1} \quad (13.6)$$

Таким образом, определив средние углы наклона изогнутых граней в месте их примыкания к ребру ячейки, легко находим средний двугранный угол на каждом ребре (аналогично (13.1)):

$$\alpha_{cp} = \alpha_0 + \beta_1^{cp} + \beta_2^{cp}, \quad (13.7)$$

а по формуле (4.8) – индекс ячейки, принимая полученное значение за приближенную величину индекса ячейки с прогнутыми гранями.

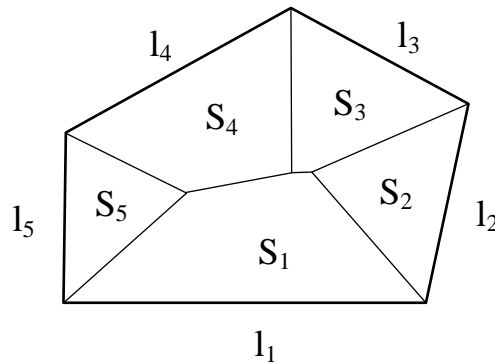


Рис.13.4. Разбиение площади многоугольника биссектрисами его углов.

На этом закончим описание алгоритма расчета давлений в каплях искаженной системы и перейдем к обсуждению результатов этих расчетов. Моделирование процесса установления давлений дало два важных результата. Первый – мы нашли разность давлений в каждой паре смежных капель, что позволяет рассчитать кривизну граней, а это в дальнейшем будет использовано для определения площади поверхности искаженных ячеек. Второй результат – мы выяснили зависимость давлений в каплях от их расстояния до искажающего тела.

Как показывают расчеты, повышение давлений в каплях незначительно по сравнению с его исходным значением, поэтому удобнее будет рассматривать не абсолютные давления в них, а превышение давлений сверх величины p_∞ . Кроме этого обнаружено, что давления в каплях одного слоя не одинаковы, а зависят от ориентации отрезка, соединяющего центр капли с центром искажающего тела, относительно главных направлений системы. К этому вопросу мы еще вернемся, а пока рассмотрим полученные зависимости среднего повышения давления Δp_{cp} в слое от его номера n для искажающих сфер различных объемов.

Прежде чем представить эти зависимости, дадим пояснение. Поскольку мы имеем дело с дискретной системой, в которой каждая капля – самостоятельное образование, а давление в каждой из них одинаково во всем объеме, то при переходе от слоя к слою давление меняется ступенчато. Поэтому на графике давления в слоях обозначены точками, и только для наглядности соединены отрезками прямых.

На рисунке 13.5 показаны зависимости среднего повышения давления в слое от его номера для искажающих сфер разных размеров. Размер сферы задан числом N – ее объемом.

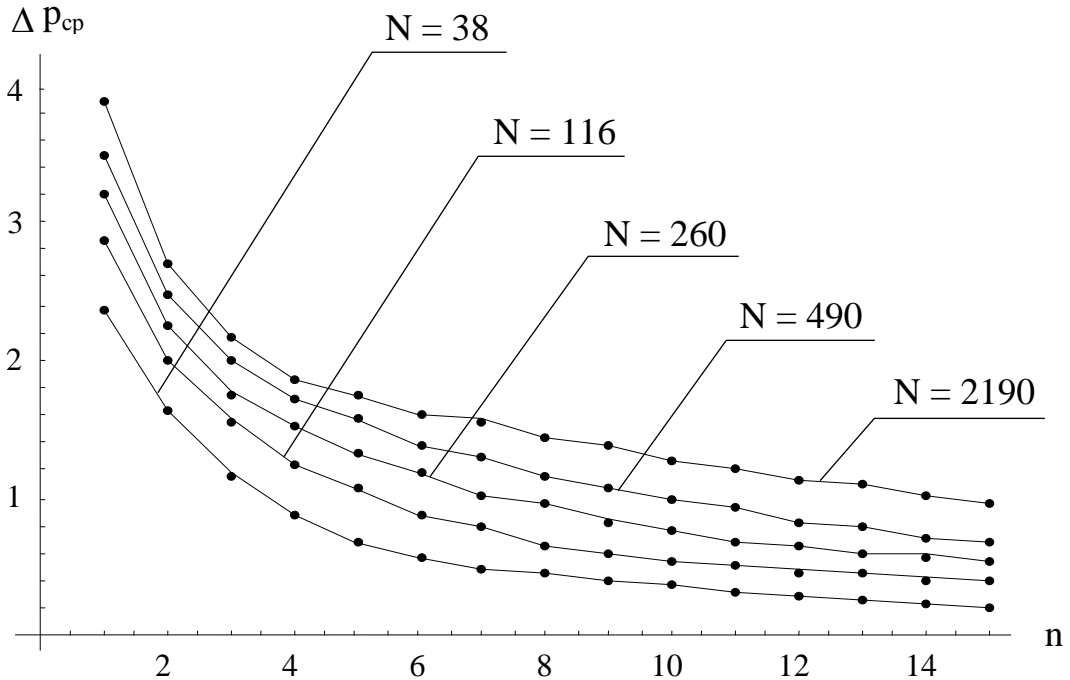


Рис.13.5. Зависимости среднего повышения давления в слое от его номера для различных искажающих сфер.

Как видим, наибольшие средние давления отмечаются в первом слое, а с увеличением номера слоя убывают.

Введем понятие – *абсолютный номер слоя*. Это номер, отсчитываемый не от поверхности искажающего тела, как делалось раньше, а от его центра. Следовательно, абсолютный номер слоя получается, если к его обычному номеру прибавить число фиктивных слоев искажающего тела. Количество же фиктивных слоев, как мы знаем из раздела 12, определяется по исходной конфигурации (рис.12.1). В отличие от обычного номера слоя, который будет по-прежнему обозначаться просто n , абсолютный номер будем обозначать n_a . Как сейчас увидим, есть случай, когда удобнее пользоваться именно абсолютным номером.

Аппроксимируя расчетные значения гладкой функцией, получаем приближенное выражение среднего повышения давления в слое от его абсолютного номера n_a , и от объема искажающей сферы N :

$$\Delta p_{ср}(n_a, N) = (0.645 + 2.132 \sqrt{N}) n_a^{-3/2} \quad (13.8)$$

Из рисунка 13.5 следует, что с увеличением размеров искажающей сферы увеличивается давление окружающих капель на ее поверхность. Зависимость среднего избыточного давления в первом слое от объема искажающей сферы показана на следующем рис.13.6. Здесь точками показаны значения, полученные компьютерным моделированием, а гладкая кривая – аппроксимация этих значений непрерывной функцией, имеющей вид:

$$\Delta p_{ср1}(N) = 5.384 - \frac{5.516}{N^{1/6}} \quad (13.9)$$

Из этого выражения следует, что данная зависимость имеет предел, равный 5.384, т.е. среднее избыточное давление в первом слое не может достичь этого значения, какой бы большой ни была искажающая сфера (напомним, что все эти числовые значения получены только для степени сжатия системы $C = 20$).

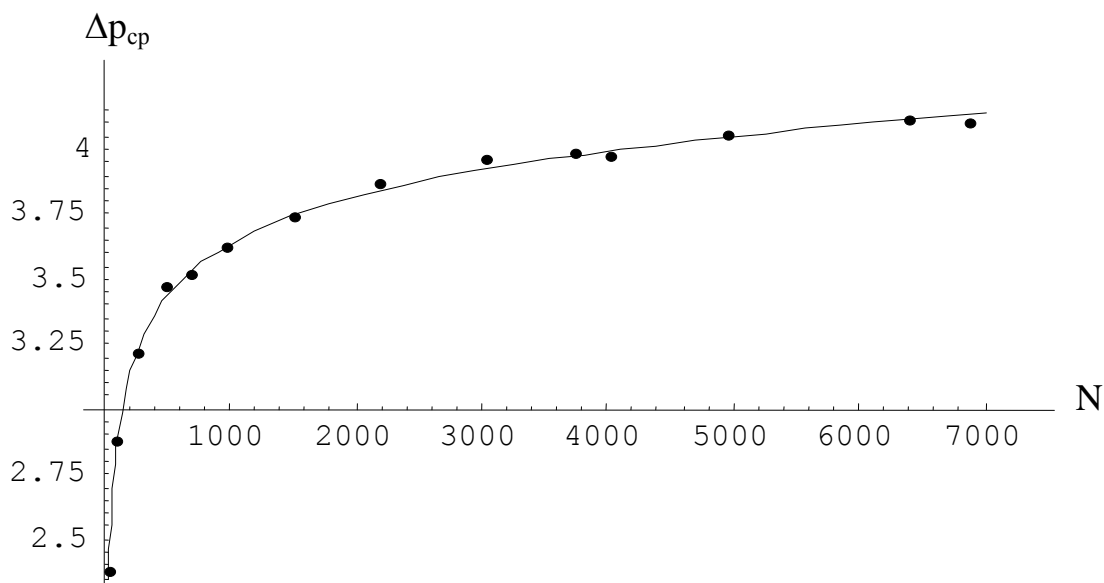


Рис.13.6. Зависимость среднего повышения давления в первом слое от объема искажающей сферы.

Теперь вернемся к вопросу неравномерности давлений в каплях одного слоя. Замечено, что в каплях слоя повышения давления не одинаковы, а изменяются от некоторого максимального значения Δp_{\max} у одних капель, до некоторого минимального Δp_{\min} - у других.

Чтобы наглядно продемонстрировать характер этой неравномерности на примере первого слоя, поступим следующим образом. Возьмем искажающую сферу, и в тех местах, где на нее давят капли, в серединах их участков контакта выведем перпендикуляры к поверхности сферы. На каждом перпендикуляре от его начала отложим в некотором масштабе величину повышения давления в капле, расположенной на этом месте, и сверху, на концы полученных векторов «натянем» гладкую замкнутую поверхность, которую назовем *объемной диаграммой избыточных давлений* в каплях первого слоя. Такая диаграмма, построенная для искажающей сферы с $N=38$, изображена на рис.13.7. На ней отмечены главные большие направления системы и указаны значения повышения давления в некоторых характерных точках. Удивительно, что в форме этой диаграммы угадывается скругленный ромбододекаэдр, ориентированный так же, как и ячейки неискаженной системы.

Введем понятие *относительной неравномерности повышения давления* $\delta_{\Delta p}$ в слое, и определим ее величину отношением:

$$\delta_{\Delta p} = \frac{\Delta p_{\max} - \Delta p_{\min}}{\Delta p_{cp}}$$

Если находить эту величину для последовательных слоев искажающей сферы, то можно обнаружить, что она практически линейно растет с номером слоя. То есть, чем дальше

слой от искажающего тела, тем неравномерность давлений в его каплях выражена сильнее. На рис.18.8 для примера представлены значения относительной неравномерности повышения давления в слоях, найденные для той же искажающей сферы с $N=38$.

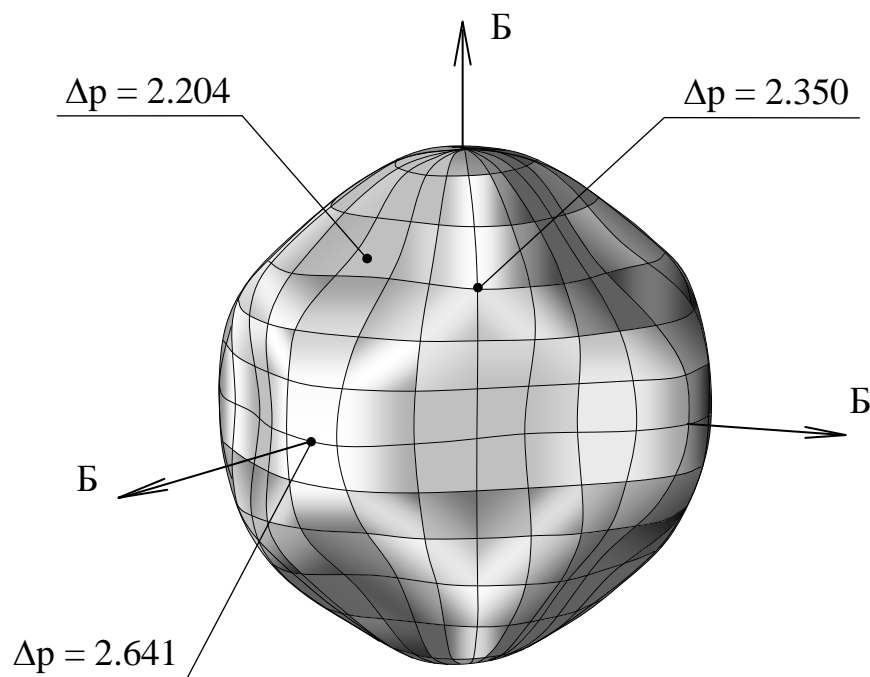


Рис.13.7. Объемная диаграмма избыточных давлений в каплях первого слоя

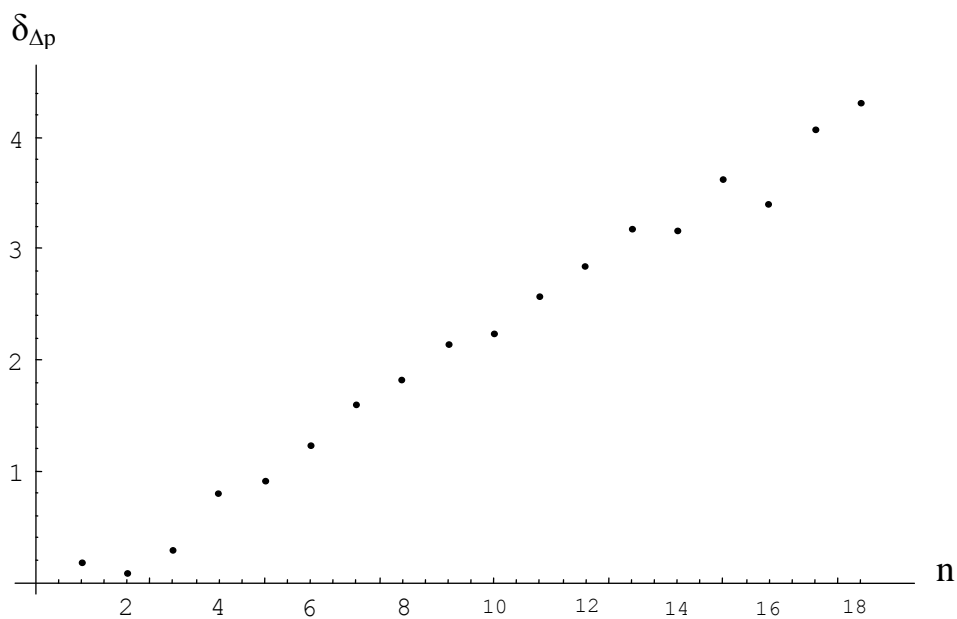


Рис.13.8. Значения относительной неравномерности повышения давлений в слоях.

Если сопоставить расположение капель в слое (рис.10.5) и так же ориентированную диаграмму избыточных давлений, хотя бы для первого слоя (рис.13.7), то можно заметить простую зависимость – давление в капле тем больше, чем меньше расстояние от капли до искажающего тела, измеренное в единицах длины.

В связи с этим, было бы интересно выяснить пространственную картину распределения давлений вокруг искажающего тела. Но для этого надо представить поле давлений, состоящем не из отдельных участков-ячеек, где давление меняется ступенчато при переходе от одного участка к другому, а непрерывным, с плавным изменением давления между любыми двумя точками. Тогда можно ввести понятие *поверхности равного давления* – поверхности, проходящей через все точки, давления в которых одинаковы. Эти гладкие замкнутые поверхности, окружающие искажающее тело, обладают кубической симметрией и вложены одна в другую как матрешки – чем глубже внутрь, тем больше давление. Возможно, эти поверхности имеют сферическую форму, но с определенностью этого сказать нельзя.

Сейчас важно отметить следующее. Если взять искажающую сферу и построить вокруг нее какую-нибудь поверхность равного давления для некоторого давления p , а затем заменить искажающую сферу на бóльшую, и повторить построение для того же давления p , то окажется, что поверхность равного давления во втором случае будет дальше отстоять от искажающего тела, чем в первом. Это следует из установленного ранее факта, что вокруг большого искажающего тела давления повышаются в большей степени, чем вокруг меньшего.

14. Работа искажения

Как мы помним, работа искажения затрачивается на преобразование поверхности тела, помещенного в систему, из исходной конфигурации в сферическую. Эта работа идет на дополнительную деформацию капель, увеличивая их энергию поверхности.

Чтобы найти работу преобразования искажающего тела, представим его в виде пустотелого механизма, у которого поверхность может изменять форму при помощи внутренних устройств – такая модель ранее упоминалась. Нам известны начальная и конечная формы этого механизма, но существует множество способов ее изменения. Один из способов, например, реализуется, если сделать каждую грань исходной конфигурации в виде отдельной пластины, и перемещать их некоторым образом так, чтобы в конечном итоге они образовали граненую сферу того же объема (при этом пластины будут слегка напозать друг на друга, поскольку площадь поверхности уменьшается). Для реализации других способов можно изменить характер перемещения пластин, или, например, разбить каждую грань исходной конфигурации на две, три, или более частей, которые будут перемещаться отдельно от других до образования сферической поверхности, и т.д.

Встает вопрос – будет ли одинаковой работа, затраченная на преобразование этой поверхности, при различных способах ее изменения? Вместо ответа предложим гипотезу – работа, затраченная на преобразование поверхности искажающего тела, зависит только от начальной и конечной формы этой поверхности, и не зависит от пути ее изменения. При этом имеется в виду, что если какой-то способ дает в конечном итоге только граненую сферу, то все остальные должны приводить к такой же граненой поверхности, даже если они могут дать более гладкую сферу.

Принятие данной гипотезы позволяет выбрать способ преобразования поверхности нашего механизма наиболее удобный для расчета работы, но прежде, чем описывать этот способ, представим в общих чертах, как происходит совершение работы при выравнивании поверхности.

Во время изменения поверхности каждая пластина совершает какое-то сложное движение, и на нее всегда действует нормальное давление от прижатой капли. Равнодействующая сил давления на пластину всегда направлена внутрь механизма перпендикулярно этому участку поверхности, а точка приложения расположена в середине поверхности контакта капли с пластиной.

Перемещение пластины осуществляется внутренним устройством нашего механизма, которое, преодолевая силы давления жидкости, совершает работу, равную по величине работе сил давления, но с противоположным знаком. Это позволяет определить работу движущих сил, рассматривая только силы давления.

В процессе перемещения каждая пластина поворачивается, изменяя очертания и площадь поверхности контакта с каплей, поэтому вектор давления, приложенный к ней, непрерывно изменяется по величине и направлению, как меняется и угол между этим вектором и направлением перемещения точки его приложения.

При таких условиях работа должна находиться интегрированием, но для этого необходимо знать аналитическую зависимость вектора силы от положения точки, в которой она действует. В общем случае точное решение этой задачи очень сложно.

Для приближенного вычисления работы сделаем упрощение – разобьем весь путь перемещения пластины на несколько шагов, считая величину и направление силы на каждом шаге постоянными, а перемещение точки приложения прямолинейным. Тогда работа, совершенная на всем пути, определится суммированием элементарных работ на каждом шаге.

Работа, совершенная на всей поверхности, очевидно, будет равна сумме работ на отдельных участках, составляющих поверхность. Но прежде, чем проводить это

суммирование по шагам и по пластинам, необходимо определиться, каким же образом разбивать поверхность нашего механизма на пластины, и по какому закону перемещать их в пространстве до образования конечной формы.

В разделе 11, определяя вид искаженных ячеек первого слоя, мы видели, какие изменения произошли в форме их нижних граней, прижатых к искажающему телу (рис.11.3, рис.11.6). Если представить, что процесс искажения происходит не мгновенно, а за несколько отдельных шагов, то форма ячеек первого слоя будет так же постепенно меняться от исходной к конечной. При этом наиболее естественным будет принять, что нижние грани этих ячеек, оставаясь в том же количестве, поворачиваются и сдвигаются так, чтобы с каждым шагом наиболее коротким путем приближаться к конечному положению на сфере. Тогда останется поставить в соответствие каждой нижней грани ячейки отдельную пластину механизма, в том же положении и той же конфигурации, и это будет самый простой вариант представления поверхности нашего механизма на каждом шаге изменения. Будем предполагать при этом, что пластины всегда остаются плоскими.

На рис.14.1 показан ряд последовательных форм нашего механизма на пути его превращения в сферу, состоящем для наглядности всего из трех шагов. Здесь, как и ранее, взята исходная конфигурация с $N = 38$, с которой мы и будем работать дальше.

Рассмотрим поверхность механизма в исходной конфигурации, и возьмем его произвольную грань - на рис.14.1 она выделена кружком. На рис.14.2 эта же грань изображена крупно, и на ней отмечен участок контакта прилегающей капли (в дальнейшем такой участок будем называть *пятном контакта*). Точка М является точкой приложения равнодействующей сил давления на этом участке, или, что то же самое – центром тяжести пятна контакта. Давление p в капле, действующее на этом пятне, создает силу F , равную:

$$F = p S_k, \quad (14.1)$$

где: S_k – площадь пятна контакта.

Чтобы определить площадь пятна, необходимо выяснить, как формируются его очертания. На рисунке 14.2 видно, что прямолинейные границы пятна контакта параллельны соответствующим сторонам грани, и отстоят от них на расстояния δ_1 , δ_2 , δ_3 и δ_4 . Чтобы найти эти расстояния, проведем сечения А – А и Б – Б граней вместе с прилегающими каплями, и покажем их на этом же рисунке. На сечениях видно, что причиной отступов пятна контакта от краев грани являются закругления свободной поверхности жидкости под двугранными углами.

При одинаковом радиусе r величина этих отступов δ_1 , δ_2 , δ_3 и δ_4 зависит от величины двугранных углов - соответственно от φ_1 , φ_2 , φ_3 и φ_4 . На крупно выделенном узле, расположенном внизу рисунка 14.2, рассмотрим треугольник CDE, из которого имеем:

$$\delta_3 = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi_3}{2}$$

Аналогичные выражения получаются и для остальных сторон грани:

$$\delta_1 = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi_1}{2}$$

$$\delta_2 = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi_2}{2}$$

$$\delta_4 = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi_4}{2}$$

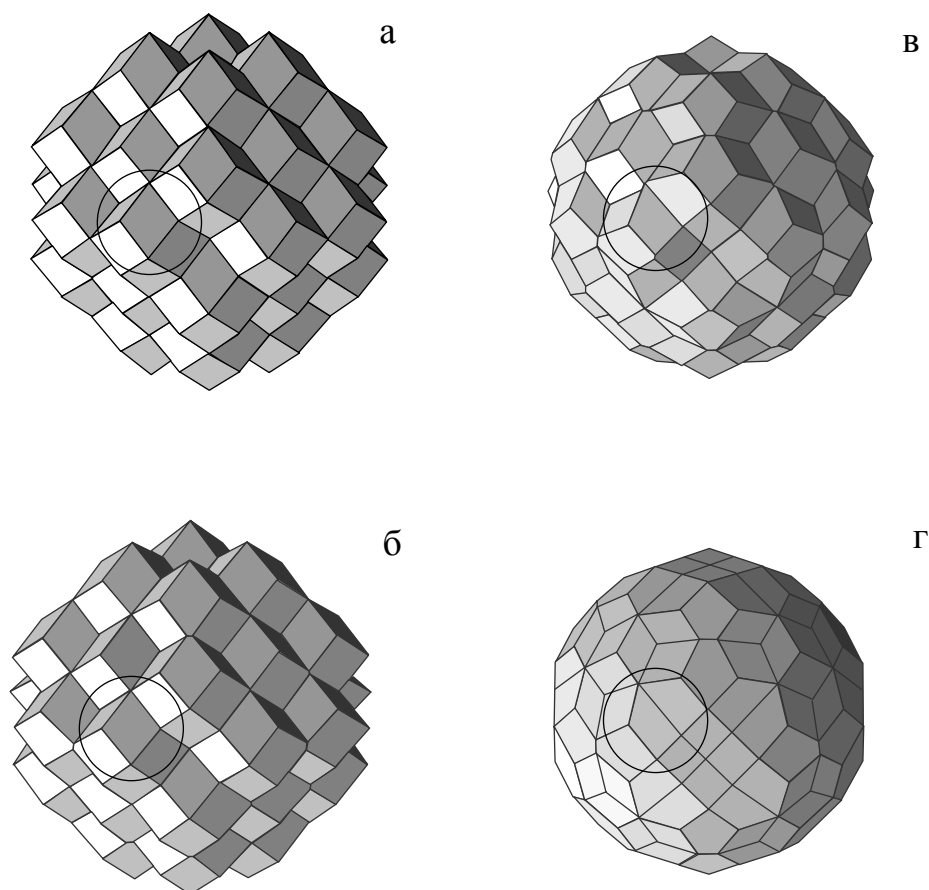


Рис.14.1. Пошаговое преобразование исходной конфигурации в искажающую сферу.

Таким образом, зная очертания грани, и вычислив отступы δ , находим границы пятна контакта, а по ним – площадь, заключенную внутри этих границ. Однако полученная величина будет несколько больше искомой площади S_k , поскольку у реального пятна, как известно, углы скруглены. Расчеты пятен контакта скругленного ромбододекаэдра показывают, что найденную площадь необходимо уменьшить приблизительно на величину $1.3 r^2$.

Итак, мы описали порядок нахождения силы F давления капли на отдельную пластину. Поскольку мы начали с исходной конфигурации, то в этом положении все грани одинаковы, двугранные углы φ ячеек так же одинаковы (120°), поэтому одинаковыми будут все пятна контакта, и каждое из них будет расположено посередине своей грани. Отсюда ясно, что в исходном положении на все пластины механизма действуют одинаковые по величине силы, приложенные в серединах граней.

Теперь представим, что поверхность механизма изменилась на один шаг и приняла конфигурацию, изображенную на рис.14.1 б. При этом все пластины немного сдвинулись и повернулись в сторону сглаживания поверхности. Если мы рассмотрим ту же выделенную грань в новом положении, то отметим, что контуры ее изменились (на рис.14.1 б эти изменения едва заметны). Кроме этого, повороты граней вызвали изменения углов, изображенных на рис.14.2 – углы φ_1 , φ_3 и φ_4 уменьшились, а φ_2 увеличился. И, наконец, искажение ячеек привело к увеличению давления в каплях, отчего радиус r жидкости уменьшился по сравнению с предыдущим значением. В

результате изменилась площадь пятна контакта, а само это пятно вместе с центром М сдвинулось относительно контуров грани. Все это – изменение площади пятна, увеличение давления и поворот грани - привело к изменению величины и направления силы F , а изменение положения грани и смещение пятна контакта на ней вызвали перемещение в пространстве точки приложения этой силы.

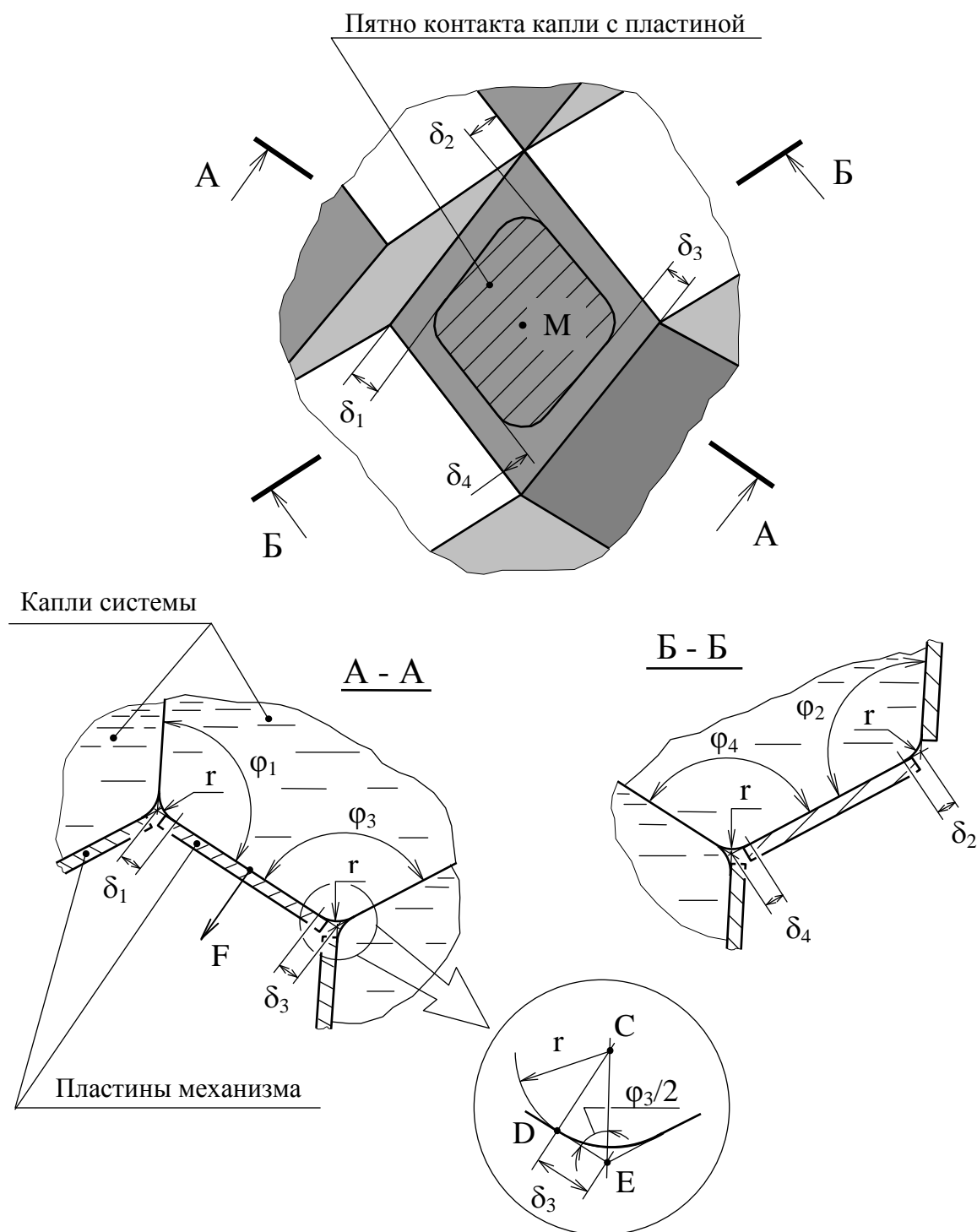


Рис.14.2. Определение границ пятна контакта капли с пластиной

Если обозначить среднее значение вектора силы на одном шаге \vec{F}_{cp} , а вектор перемещения точки приложения $\vec{\Delta s} = \vec{M'} - \vec{M''}$ (где M' и M'' – точки приложения силы,

соответственно в начале и в конце шага), то работа сил давления на грань на этом шаге будет равна скалярному произведению векторов:

$$\Delta A = F_{cp} \Delta s \cos \left(\vec{F}_{cp} \wedge \vec{\Delta s} \right) \quad (14.1)$$

Обозначим m – число граней исходной конфигурации, а n – число шагов, на которое мы разбили весь путь преобразования поверхности, тогда вся работа этого преобразования A_d будет равна:

$$A_d = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_{i,j}, \quad (14.2)$$

где: $\Delta A_{i,j}$ - работа, совершенная силами давления, действующими на i -ю грань механизма на j -ом шаге, найденная по формуле (14.1).

Причина затраты работы для образования гладкой поверхности, искажающей систему, требует пояснения. Поскольку объем искажающего тела при всех изменениях остается постоянным, некоторые участки поверхности при своем движении, поворачиваясь, удаляются от центра тела, преодолевая силы давления, и тогда работа по их перемещению положительна. Другие участки наоборот, приближаются к центру, уступая действию сил давления, и работа по их перемещению отрицательна.

Если бы наш механизм окружала сплошная среда, где одинаковое давление действовало равномерно на всю поверхность, то суммарная работа перемещения всех пластин была бы равна нулю. У нас же давление разное у разных капель, и действует не на всю поверхность, а только на пятнах контакта, которые сдвигаются так, что в результате положительная работа превышает отрицательную по абсолютной величине. Вполне понятно, что вычисление работы преобразования поверхности искажающего тела не может быть выполнено без обращения к пространственной модели искаженной системы, т.е. здесь эта задача решается только программным способом. Результаты расчетов для некоторых искажающих тел при степени сжатия системы $C=20$, и коэффициенте поверхностного натяжения жидкости $f = 1.0$ оформлены графически на рис.14.3. Здесь точками показаны расчетные значения.

Совершенная искажающим телом работа, как мы знаем, повышает энергию капель системы, увеличивая площадь их поверхности. Было бы вполне логично проверить это утверждение, определив увеличение поверхности капель в результате искажения, и сравнив это значение с затраченной работой.

Имея численную модель искаженной системы, найти увеличение поверхности ее элементов нетрудно – форма ячеек известна, по формуле (5.8) находим площадь поверхности искаженных капель, вычитаем из них площади неискаженных, и оставшиеся прибавки суммируем. То, что поверхности контакта изогнуты - а это влияет на их площадь – учитывается приближенным методом, но эта прибавка, как оказалось, очень незначительна (не более 0.1%), поэтому методику ее учета рассматривать не будем. Однако в расчете увеличения площади поверхностей есть одна особенность, которая не позволяет получать значения с приемлемой достоверностью. Дело вот в чем.

Мы знаем, что искажение распространяется вокруг искажающего тела на любое, сколь угодно большое расстояние, уменьшаясь по мере удаления от центра. Поэтому любая капля, как бы далеко она ни находилась, вносит свой, пусть микроскопический, вклад в общее увеличение поверхности, а с удалением от центра таких капель в каждом слое становится все больше. При суммировании ряда с большим числом членов, как известно, результат сильно зависит от точности нахождения каждого слагаемого. Но как показали расчеты, получаемая точность определения приращения поверхности каждой капли недостаточна для получения устойчивого результата. Тем не менее, приближенная оценка

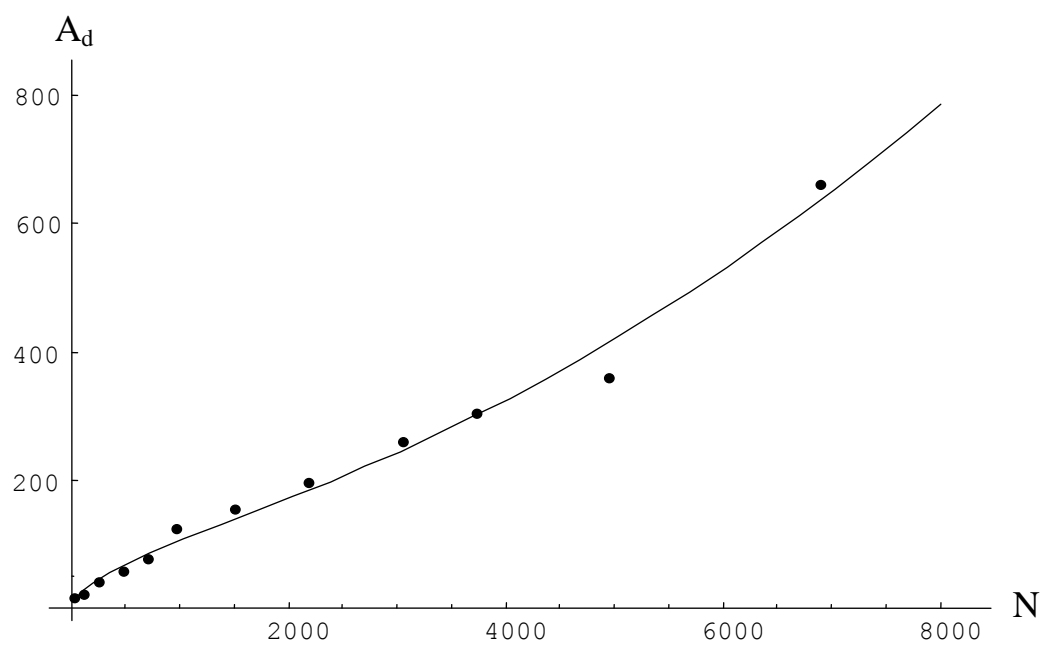


Рис.14.3. Зависимость работы искажения от величины искажающего тела.

приращения энергии системы в целом соответствует приведенной выше зависимости работы искажения от размеров искажающего тела.

15. Взаимное влияние искажающих тел

Ранее, рассматривая искажающее тело, мы всегда полагали, что оно является единственным телом в системе, и деформации от него расходятся симметрично во всех направлениях.

Вполне закономерно поставить вопрос – что произойдет, если в системе окажутся два искажающих тела? Понятно, что в этом случае искажения, вызванные ими, будут как-то накладываться друг на друга, но самое главное – каждое из тел потеряет свое исключительное положение в системе, находясь в поле действия другого. Это приведет к любопытным эффектам, которые мы вскоре исследуем, но прежде подготовим математическую базу для этого.

Давайте отвлечемся от всего и рассмотрим некоторое преобразование на плоскости, для чего выберем произвольную точку O и проведем через нее ось X – как показано на рис. 15.1. На некотором расстоянии от точки O по оси X поставим другую точку – P , через которую проведем отрезок KL перпендикулярно оси так, что $KP = PL \ll OP$.

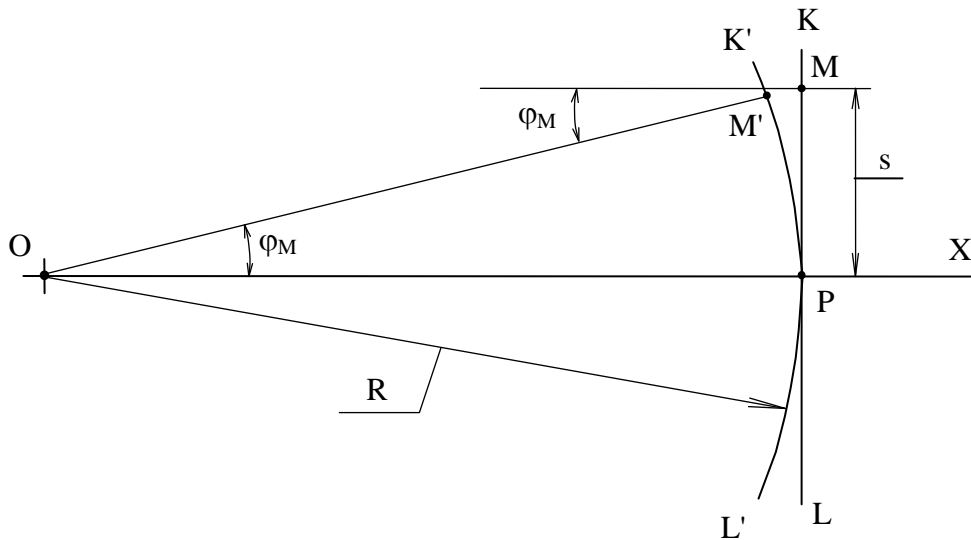


Рис.15.1. Преобразование отрезка прямой в дугу окружности.

Предположим, что в результате какого-то процесса все точки плоскости, за исключением тех, которые лежат на оси X , поменяли свое положение таким образом, что наш отрезок KL , не изменяя длины, стал дугой $K'L'$ окружности радиусом $R = OP$ с центром в точке O . В этом случае математики говорят, что на плоскости задано преобразование, переводящее точки отрезка KL в точки дуги $K'L'$.

Мы утверждаем, что если на место отрезка KL поместить дугу окружности, проходящую через точку P , радиусом ρ и с центром C , лежащем на оси X , то при данном преобразовании она перейдет в другую дугу, так же расположенную, но с иным радиусом ρ' таким, что:

$$\frac{1}{\rho'} \approx \frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{R}, \quad (15.1)$$

где знак «+» берется, если центр кривизны C дуги и точка O лежат по одну сторону от точки P , и знак «-», если точки C и O лежат по разные стороны от точки P .

Докажем это утверждение следующим образом. Выберем на отрезке КР произвольную точку М, отстоящую от Р на расстоянии s (рис.15.1). Когда рассматриваемое преобразование переведет отрезок KL в дугу K'L', точка М займет новое положение М' такое, что расстояние М'Р, измеренное по дуге, не изменится, и останется равным s . При этом нормаль к исходному отрезку, проведенная через точку М, повернется на угол:

$$\varphi_M = \frac{s}{R}, \quad (15.2)$$

и займет положение отрезка ОМ'.

Теперь рассмотрим преобразование дуги EF радиусом ρ , у которой центр кривизны С лежит слева от точки Р (рис.15.2). На этой дуге отметим точку N, расположенную на том же расстоянии s от точки Р, измеренном вдоль дуги. Очевидно, что эта точка не совпадает с точкой М на отрезке KL, но они могут быть сколь угодно близкими, если выбрать расстояние s достаточно малым. Ввиду этого можно считать, что в результате нашего преобразования дуга EF изогнется так, что нормаль, проведенная к ней в точке N, повернется в ту же сторону и на тот же угол $\varphi_N \approx \varphi_M$, что и у отрезка КР в точке М. При этом нормаль займет положение N'C'.

Проведем через N' прямую, параллельную NC до пересечения с осью X в точке А, и рассмотрим треугольник AN'C'. Как известно, внешний угол α' равен сумме внутренних, не смежных с ним:

$$\alpha' = \alpha + \varphi_N \approx \alpha + \varphi_M,$$

но $\alpha' = \frac{s}{\rho'}$ и $\alpha = \frac{s}{\rho}$, тогда с учетом (15.2) получим:

$$\frac{s}{\rho'} \approx \frac{s}{\rho} + \frac{s}{R},$$

что после сокращения на s даст (15.1).

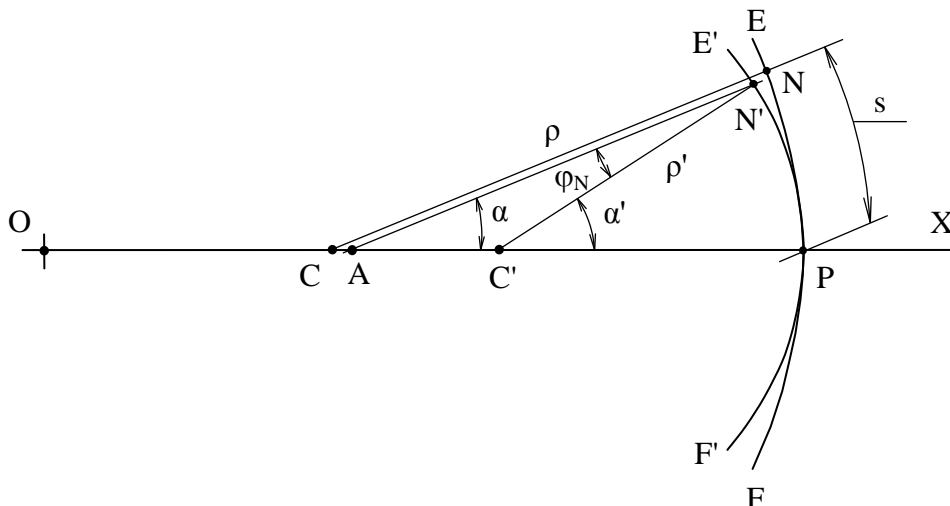


Рис.15.2. Преобразование дуги окружности в дугу меньшего радиуса.

Второй вариант, когда центр кривизны дуги EF лежит правее точки Р, мы подробно рассматривать не будем, поскольку на рис.15.3 из треугольника BNC легко видеть:

$$\alpha = \alpha' + \varphi_N \approx \alpha' + \varphi_M,$$

откуда:

$$\alpha' \approx \alpha - \varphi_M,$$

что после подстановки выражений углов и сокращения на s даст (15.1).

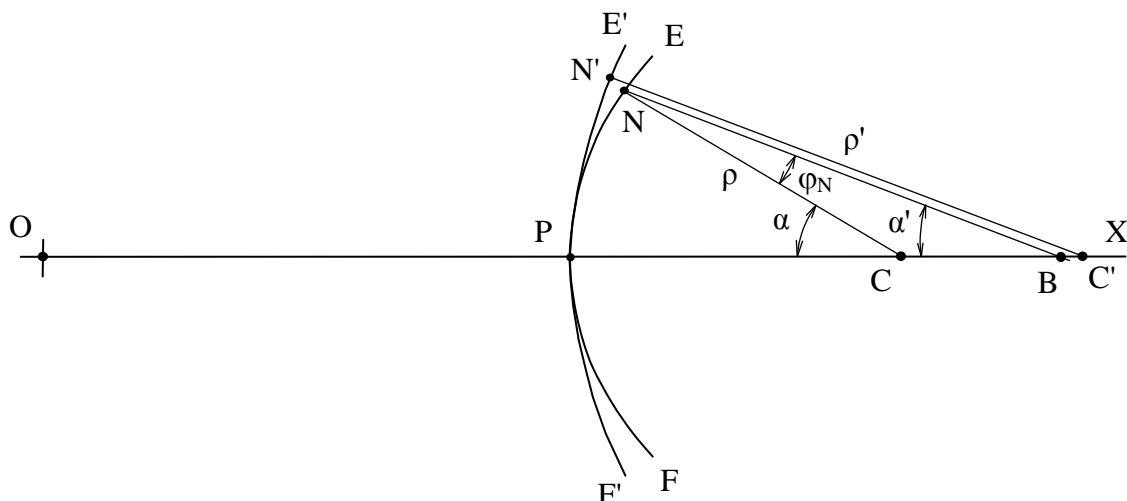


Рис.15.3. Преобразование дуги окружности в дугу большего радиуса.

Описанное преобразование будем рассматривать как плоскую математическую модель влияния одного искажающего тела на кривизну слоев другого тела. Согласно этой модели, срединные поверхности слоев, отсчитываемых от каждого тела, взаимно деформируются, и уже не сохраняют ту симметричную форму, которая изображена на рис.10.7. Эти изменения выражаются в том, что срединные поверхности слоев, расположенных между телами, уменьшают свою кривизну, а расположенные за телами – увеличивают, как показано на рис.15.4, где стрелками обозначены большие направления системы.

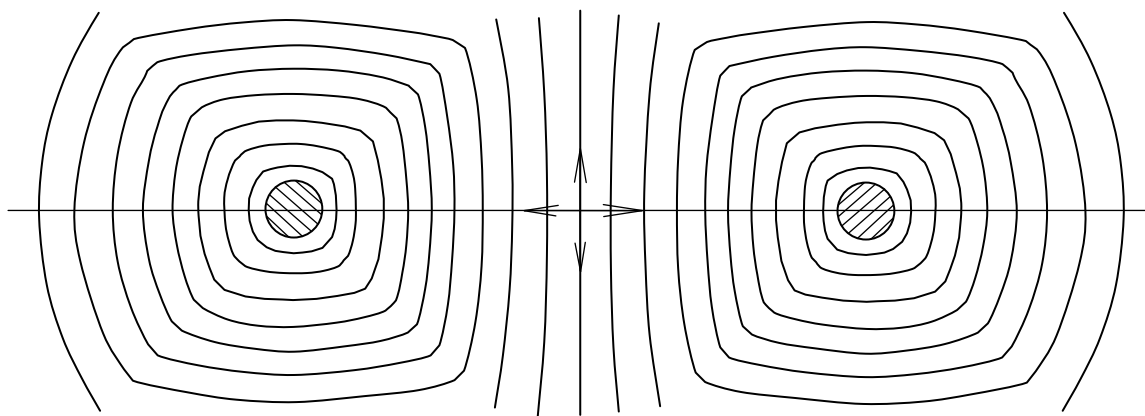


Рис.15.4. Взаимное изменение кривизны срединных поверхностей слоев двух искажающих тел.

Это обстоятельство приводит к изменению сил давления, действующих на каждое искажающее тело со стороны окружающих капель.

Когда искажающее тело было единственным в системе, оно, как мы знаем, создавало вокруг себя симметричные условия – поверхности контакта капель, а так же давления в них имели кубическую симметрию относительно центра тела. В таких условиях искажающее тело находилось в равновесии под действием окружающих сил.

Когда же в системе появилось другое тело, оно нарушило симметрию вокруг первого, хотя и само оказалось в таких же условиях. В результате этого, действующие на тела силы перестали быть уравновешенными, и они оба стали испытывать как будто бы взаимное силовое воздействие.

Найдем выражение этих сил. Поскольку оба тела равноправны, достаточно найти одну из них. Рассмотрим два искажающих тела объемом, соответственно N_1 и N_2 (напомним, что объем искажающего тела мы выражаем количеством объемов ячеек системы) и найдем выражение силы, действующей на первое тело под влиянием второго. Обозначим расстояние между центрами тел, выраженное в числе слоев, через n_{12} . В эту величину входит число фиктивных слоев $n_{\phi 1}$, $n_{\phi 2}$ тел, и число слоев n_{Π} , расположенных между поверхностью одного и поверхностью другого, равное:

$$n_{\Pi} = n_{12} - n_{\phi 1} - n_{\phi 2}$$

Положим, что тела расположены так, что прямая, проходящая через их центры, ориентирована вдоль одного из больших направлений системы – как изображено на последнем рисунке. При таком расположении тел квадратные грани срединных поверхностей их слоев «смотрят» точно друг на друга (вспомним, что форма слоя всегда строго ориентирована по главным направлениям системы – рис.10.5).

На рисунке 15.5 показаны тела 1 и 2, а срединные поверхности некоторых слоев изображены такими, какими они были без учета взаимного влияния. Обозначим радиус срединной поверхности первого слоя первого тела через ρ . Очевидно, что до появления второго тела, этот радиус был одинаковым в точках Б (ближняя к телу 2), и Д (дальняя), и определялся из полученного ранее выражения (12.8) подстановкой $N=N_1$ и $n=1$.

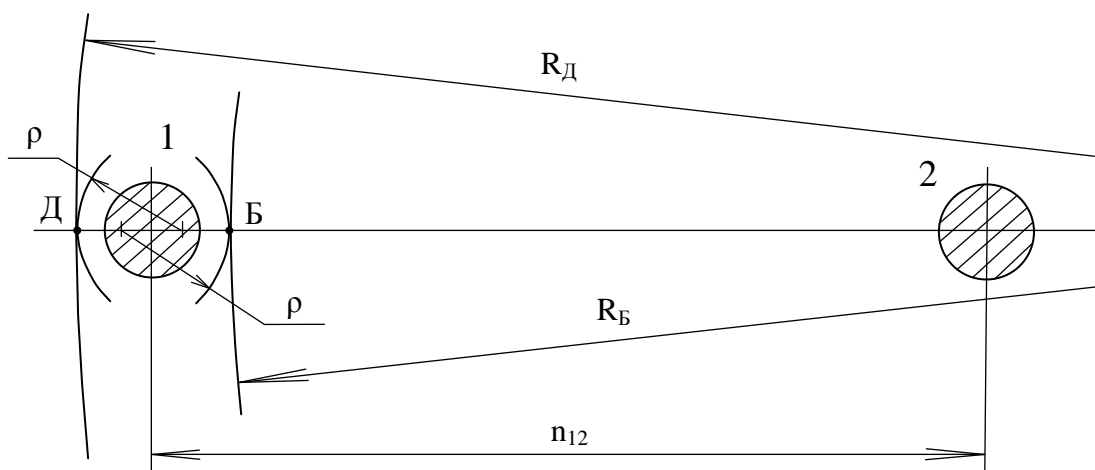


Рис.15.5. К определению радиусов срединной поверхности первого слоя первого тела.

На этом же рисунке показаны две срединные поверхности слоев второго тела, проходящие через точки Б и Д. Радиус первой - R_B определяется из того же выражения (12.8) подстановкой $N=N_2$ и $n=n_{II}$, а радиус R_D второй поверхности – соответственно подстановкой в (12.8) $N=N_2$ и $n=n_{12}+n_{\phi 1}-n_{\phi 2}+1$.

В результате влияния «соседа» на первый слой первого тела радиусы кривизны его срединной поверхности в точках Б и Д изменились, а их новые значения стали удовлетворять выражению (15.1):

$$\frac{1}{\rho_B} \approx \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_B}; \quad \frac{1}{\rho_D} \approx \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_D},$$

отсюда:

$$\rho_B \approx \frac{\rho}{1 - \rho/R_B}; \quad \rho_D \approx \frac{\rho}{1 + \rho/R_D} \quad (15.3)$$

Как видим, под влиянием соседнего тела радиус срединной поверхности первого слоя у первого тела в точке Б увеличился, а в точке Д – уменьшился. Но на данный момент нам ничего не известно о влиянии кривизны срединной поверхности на давления в каплях первого слоя.

Выделим в неискаженной системе множество элементов, которые касаются друг друга только боковыми гранями, и которые все одновременно могут лежать на плоскости, упираясь в нее каждый одной вершиной – как, например, элементы, составляющие одну грань слоя, изображенного на рис.10.5. Такое множество можно назвать плоским слоем элементов системы, и их может быть два типа: один тип, когда каждый элемент, если он находится не на границе множества, касается соседних своими шестью боковыми гранями, а плоскости касается тупой вершиной. Другой тип множества – когда элемент соприкасается с соседними по четырем граням, а на плоскость ложится острой вершиной. У таких множеств срединная поверхность является как же плоскостью, а само множество простирается во все стороны до границ системы, разделяя ее на две части.

Возьмем любое из этих множеств и начнем изгибать его так, чтобы срединная поверхность из плоской стала сферической с все меньшим и меньшим радиусом. Очевидно, что все ячейки этого множества будут одинаково деформироваться, увеличивая индекс i , соответственно, давление в каплях. Отсюда можно сделать вывод, что чем меньше радиус кривизны срединной поверхности такого множества, тем давление в его каплях выше.

Мы брали множество элементов неискаженной системы, которые деформировались только в результате изгиба его срединной поверхности. В таком простом случае можно было бы аналитически найти зависимость повышения давления в каплях от кривизны срединной поверхности этого множества. Но в искаженной системе все сложнее – в первом слое основные деформации вызваны соседством с гладкой поверхностью искажающего тела, а деформации от изгиба срединной поверхности слоя незначительны. Это затрудняет выделение интересующей нас зависимости.

На помощь приходит численное моделирование. Когда в разделе 13 мы находили повышение давлений в слоях, то радиус кривизны срединной поверхности каждого слоя задавался выражением (12.8) – именно такие радиусы устанавливаются при данном искажающем теле. Чтобы найти зависимость повышения давления в первом слое от радиуса кривизны его срединной поверхности можно искусственно изменять значения, задаваемые выражением (12.8), и находить соответствующее повышение давления. Поскольку повышение давления в разных каплях одного слоя всегда несколько различаются (рис.13.7), мы будем иметь дело только с его средним значением.

Проведенное моделирование для различных искажающих тел от $N=38$ до $N=6895$ подтвердило предполагаемую ранее закономерность – с уменьшением радиуса ρ срединной поверхности первого слоя давление в нем растет, а с увеличением - падает. Кроме этого выяснилось, что чем больше искажающая сфера, тем это изменение менее выражено. На рисунке 15.6 приведен результат такого моделирования для одной искажающей сферы объемом $N = 490$, где по оси абсцисс отложено изменение радиуса срединной поверхности первого слоя, а по оси ординат – среднее повышение давления в слое от искажения.

Все полученные результаты удалось аппроксимировать несложным единым выражением:

$$\Delta p_{cp}(\Delta \rho, N) = 5.384 - \frac{5.516}{N^{1/6}} - \left(0.009 + \frac{0.191}{N^{1/6}}\right) \Delta \rho \quad (15.4)$$

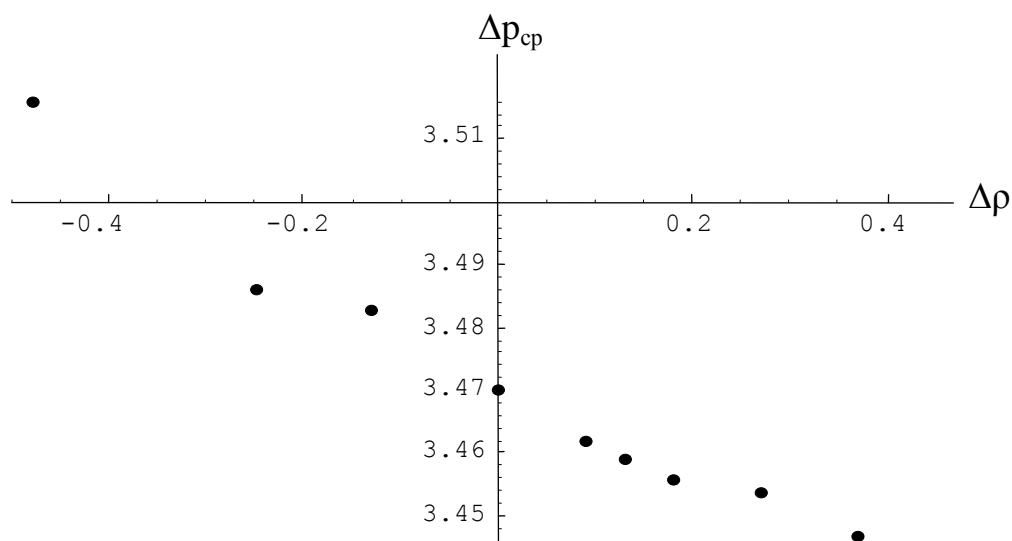


Рис.15.6. Зависимость среднего повышения давления в первом слое искажающего тела с $N=490$ от изменения радиуса кривизны его срединной поверхности.

Теперь, возвращаясь к рис.15.5, можно констатировать, что в первом слое тела 1 под влиянием тела 2 произошли изменения в давлениях капель: в точке Б давление понизилось, а в точке Д – повысилось. Но здесь рассмотрено влияние тела 2 на тело 1 только через изменение кривизны первого слоя. Однако не следует забывать, что каждое из тел создает вокруг себя повышенное давление, которое постепенно угасает с удалением согласно выражению (13.8). Следовательно, влияние тела 2 на распределение давлений в первом слое тела 1 происходит не только через изменение кривизны срединной поверхности слоя, но и прямым повышением давления, исходящим от него. Это прямое повышение давления действует противоположно первому фактору – в точке Б оно повышается в большей степени, чем в точке Д, находящейся дальше от второго тела.

Таким образом, суммируя все сказанное, получаем, что давления в каплях первого слоя тела 1 определяется тремя факторами: повышением давления вокруг самого этого тела без влияния второго, изменением кривизны слоя вокруг тела 1 под влиянием тела 2, и, наконец, повышением давления вокруг тела 2. Первый фактор зависит от положения

капли относительно тела 1, второй – от положения капли относительно обоих тел, а третий – от положения капли относительно тела 2.

Вспомним, что сейчас нашей задачей является определение силы, действующей на тело 1 в результате влияния тела 2. Для этого выразим средние давления в двух противоположных точках Б и Д (рис.15.5), используя выражения (15.4) и (13.8):

$$p_B = p_\infty + 5.384 - \frac{5.516}{N_1^{1/6}} - \left(0.009 + \frac{0.191}{N_1^{1/6}} \right) (\rho_B - \rho) + (0.645 + 2.132\sqrt{N_2})(n_{12} - n_{\phi 1})^{-3/2} \quad (15.5)$$

$$p_D = p_\infty + 5.384 - \frac{5.516}{N_1^{1/6}} - \left(0.009 + \frac{0.191}{N_1^{1/6}} \right) (\rho_D - \rho) + (0.645 + 2.132\sqrt{N_2})(n_{12} + n_{\phi 1} + 1)^{-3/2} \quad (15.6)$$

Напомним, что в этих выражениях p_∞ обозначает давление в каплях неискаженной системы, найденное в начале раздела 13.

Итак, мы нашли выражения давлений в двух противоположных точках около искажающего тела. Теперь, казалось бы, можно получить выражение результирующей силы, действующей на тело 1 под влиянием тела 2, как силы давления на сферическую поверхность. Однако мы имеем дело с отдельными каплями жидкости, поэтому простая схема сферы, испытывающей неравномерное давление, здесь не подходит.

Как мы помним, капли системы действуют не на всю поверхность искажающего тела, а только на пятна контакта. А размер пятен контакта зависит от давления в капле и от угла расхождения боковых граней ячеек – это описано в разделе 14. Поэтому определение результирующей силы здесь несколько усложняется.

В разделе 11 было установлено, что нижние грани ячеек первого слоя, которыми они прижимаются к искажающей сфере, могут иметь только четырехугольную (близкую к квадратной), пятиугольную и шестиугольную форму. Такую же форму имеют и соответствующие им пятна контакта каплей. Чтобы не усложнять вопрос, будем считать, что все нижние грани ячеек первого слоя, а так же их пятна контакта являются квадратами, а длину стороны каждого квадрата – грани ячейки примем равной 1 (что при единичном объеме капли вполне допустимо).

На рис.15.7 изображено искажающее тело 1 с двумя ячейками капель первого слоя, расположенными с противоположных сторон, и отмечены пятна контакта капель с поверхностью. На рис.15.8 построены сечения этих капель плоскостью, проходящей через центр тела, и обозначены все размеры, необходимые для дальнейших расчетов.

Чтобы правильно рассчитать силу давления капель на некоторый участок поверхности тела, необходимо знать, какую часть этого участка занимают пятна контакта. Назовем эту характеристику *коэффициентом контакта*, и будем обозначать буквой k . Величина этого коэффициента равна отношению площади пятна контакта капли, находящейся на этом участке, к площади, занимаемой ячейкой этой капли, т.е., согласно рис.15.7:

$$k = \frac{(1 - 2\delta)^2}{1^2}, \quad (15.7)$$

где δ – отступ пятна контакта от краев грани ячейки.

Скругления углов пятна контакта в данном выражении не учитываются ввиду их незначительного влияния на результат.

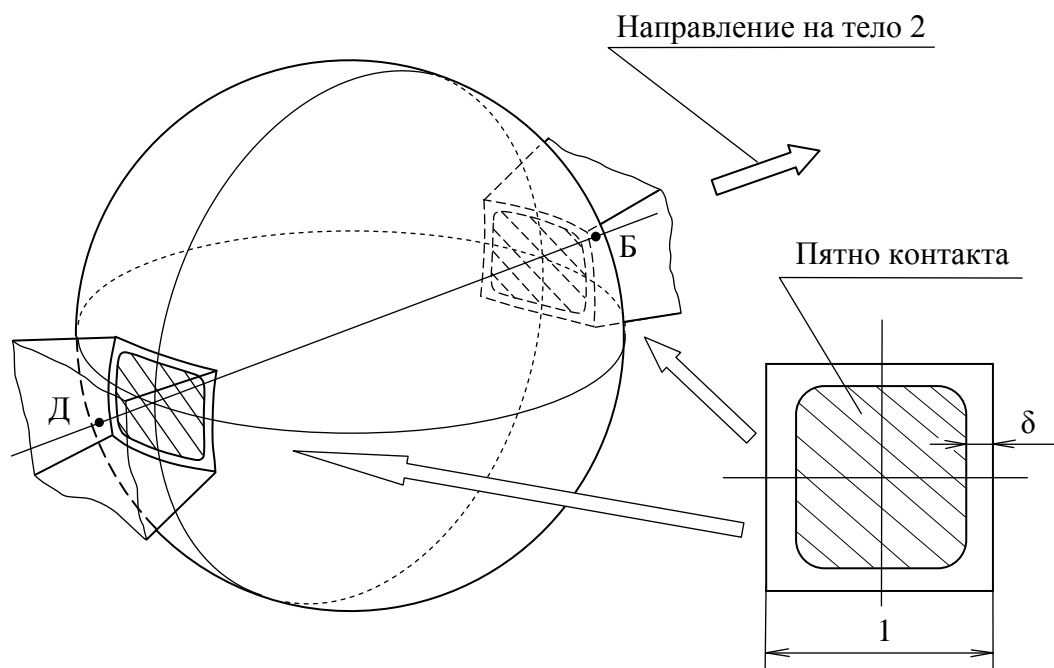


Рис.15.7. Искажающее тело 1 с двумя ячейками капель первого слоя.

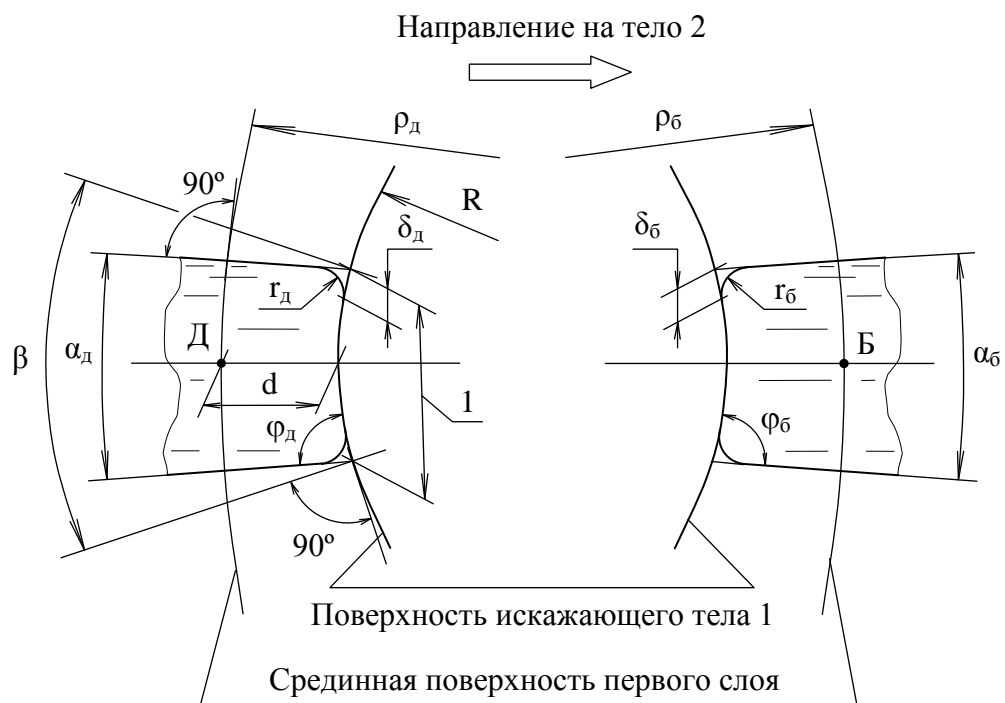


Рис.15.8. Сечения капель, изображенных на рис.15.7

Здесь нам необходимо правильно учесть геометрические различия ячеек, расположенных в точках Д и Б. На рисунке 15.8 те размеры, которые различны у обеих ячеек, имеют соответствующий индекс. Выразим все размеры:

- радиус поверхности искажающего тела – радиус шара объемом N_1 :

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 N_1}{4 \pi}};$$

- угловой размер оснований ячеек относительно центра искажающего тела:

$$\beta \approx 1/R;$$

- угол «развала» боковых граней ячеек:

$$\alpha_D \approx \frac{1}{\rho_D - d};$$

$$\alpha_B \approx \frac{1}{\rho_B - d},$$

где: ρ_B, ρ_D - радиусы срединной поверхности – определяются по формулам (15.3);

d – минимальное расстояние от срединной поверхности первого слоя до поверхности искажающего тела; для всех искажающих сфер эту величину можно принять одинаковой и равной примерно 0.42.

- двугранные углы, определяющие отступы пятна контакта:

$$\varphi_D \approx \frac{\pi + \alpha_D - \beta}{2};$$

$$\varphi_B \approx \frac{\pi + \alpha_B - \beta}{2}$$

Радиусы свободной поверхности жидкости находим по формуле (3.2), приняв, как и ранее, коэффициент поверхностного натяжения жидкости равным 1:

$$r_D = 1/p_D; \quad r_B = 1/p_B,$$

где давления p_D и p_B в каплях определяются из выражений (15.5) и (15.6).

Теперь, зная все необходимые величины, легко найти отступы пятна контакта от краев грани ячейки:

$$\delta_D = r_D \operatorname{ctg} \frac{\varphi_D}{2};$$

$$\delta_B = r_B \operatorname{ctg} \frac{\varphi_B}{2},$$

а по формуле (15.7) – коэффициенты контакта с обеих сторон тела 1:

$$k_D = (1 - 2\delta_D)^2;$$

$$k_B = (1 - 2\delta_B)^2$$

Записывая эти выражения, мы принимали боковые грани ячеек плоскими, хотя знаем, что на самом деле это не так – давления в каплях одного слоя различаются, и эти грани должны быть немного изогнуты. Однако общая форма ячейки определяется ее плоскогранной моделью, и, поскольку в конечном итоге главным оказывается не абсолютная величина двугранных углов, а их различие в противоположных ячейках, плоскогранная модель здесь вполне приемлема.

Приступаем, наконец, к последнему этапу наших расчетов – определению результирующей силы, с которой окружающие капли системы действуют на искажающее тело 1 в результате влияния на них искажающего тела 2.

Расчетная схема здесь довольно проста – шар, на поверхность которого в различных точках действуют силы, нормальные к его поверхности. Величина этих сил постепенно изменяется при переходе от одного полюса, расположенного в районе точки Д, к другому полюсу – у точки Б.

Учесть постепенное изменение величины сил при переходе от одного полюса к другому для нашей дискретной системы в общем случае очень сложно. Кроме этого, чем дальше эти силы от полюсов, тем слабее их влияние на искомую результирующую силу – их проекции на прямую, проходящую через точки Д и Б тем меньше, чем они ближе к экватору. Поэтому поступим просто, учитывая, что нас больше интересует качественная сторона явления, а не точные значения – будем учитывать только два давления – p_D и p_B , и считать, что они действуют каждое на свою часть поверхности в форме плоского круга, одна – с центром в полюсе у точки Д, а другая – у точки Б, площадью R^2 каждая (R – радиус искажающей сферы). В этом случае задача сводится только к суммированию двух сил, действующих на полюсах шара.

Итак, результирующая сила, действующая на искажающее тело 1 под влиянием тела 2, с учетом кривизны контактной поверхности по формуле (2.12), равна:

$$F_{12} = \left(\left(p_D + \frac{2}{R} \right) k_D - \left(p_B + \frac{2}{R} \right) k_B \right) R^2 \quad (15.8)$$

Как видим, за положительное направление силы здесь принято направление в сторону тела 2.

Заметим, что все рассуждения до этого относились к первому телу. Вполне очевидно, что все это можно повторить и для тела 2, рассматривая влияние на него тела 1. Однако, если размеры тел не одинаковы, то при той же логике рассуждений все величины, получаемые в расчете, для второго тела будут другими.

Примем, что искажающие тела имеют одинаковые размеры: $N_1 = N_2 = N$. Повторяя каждый раз всю цепочку расчетов для различных расстояний n_{12} между центрами тел, мы получим зависимость сил, действующих на каждое из них, от этого расстояния. Одна из таких зависимостей, полученная для тел объемом $N=490$, изображена на рис.15.9. Хотя эти зависимости одинаковы для обоих тел, в качестве основного рассматривается тело 1, которое испытывает влияние тела 2.

На полученной кривой явно выделяются три характерных участка – АВ, ВС и CD (двигаясь по кривой в сторону уменьшения расстояния n_{12}). На участках АВ и ВС сила, приложенная к телу 1, направлена в сторону тела 2, вызывая как будто бы притяжение тел. При этом на участке АВ сила этого притяжения быстро растет с уменьшением расстояния между телами – превалирует влияние второго тела на кривизну срединной поверхности первого слоя первого тела (в выражениях (15.5 и 15.6) – второй, третий и четвертый члены).

На втором участке – ВС сила притяжения резко ослабевает, а на участке CD переходит в отталкивание – здесь главное влияние оказывает фактор собственного повышения давления вокруг искажающего тела 2, поскольку с приближением к нему растет градиент этого давления (в выражениях (15.5 и 15.6) – последнее слагаемое).

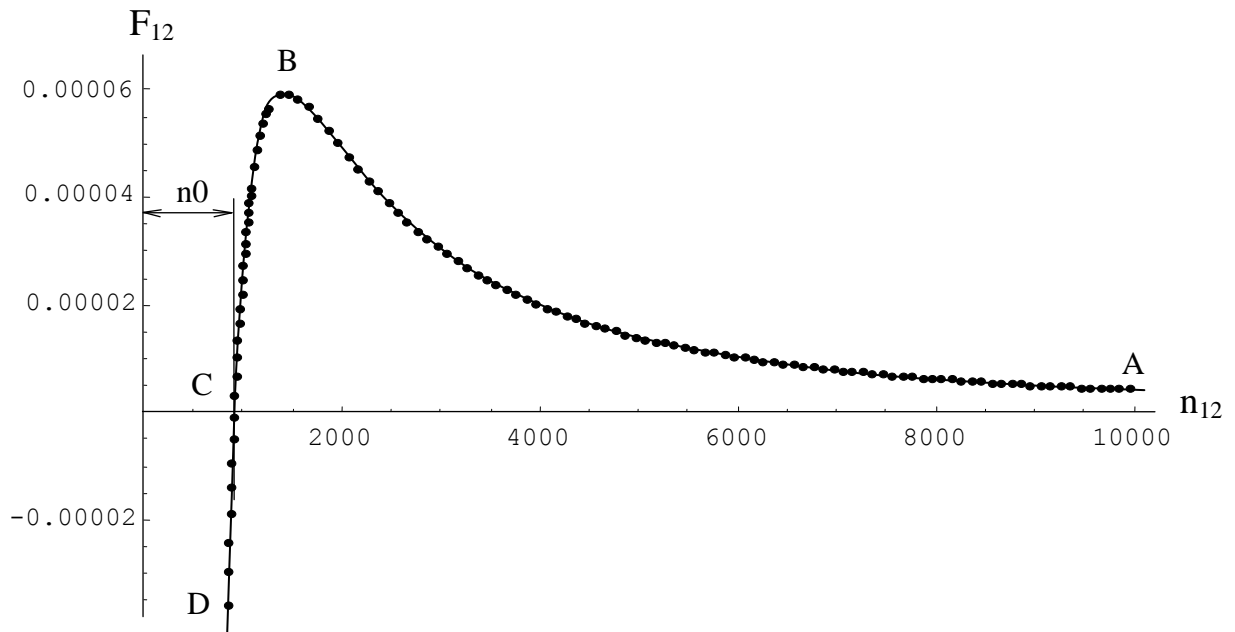


Рис.15.9. Зависимость величины силы, действующей на искажающее тело размером $N=490$ в результате влияния такого же тела, от расстояния между их центрами.

Если продлить эту зависимость в сторону уменьшения расстояния между телами, то она очень быстро уйдет вниз, показывая неимоверный рост силы отталкивания. С увеличением расстояния n_{12} кривая асимптотически приближается к оси абсцисс, оставаясь всегда выше нее – сила притяжения убывает приблизительно в квадрате от расстояния, и где-то на бесконечности исчезает совсем.

Рассматриваемая кривая обладает замечательной точкой – она обозначена буквой С – это точка пересечения кривой с осью абсцисс. Пересечение с осью означает, что когда центры тел находятся на расстоянии n_0 друг от друга, равнодействующие силы, действующие на каждое из них, становятся равными нулю, и тела обретают равновесие, поэтому это расстояние назовем *равновесным*. Равновесие это очень устойчивое – принудительное изменение расстояния между телами от величины n_0 приводит к возникновению больших восстанавливающих сил.

Позже мы еще вернемся к равновесному расстоянию, а сейчас обратимся к другому важному вопросу - как направлены силы взаимного влияния тел? На первый взгляд ответ кажется очевидным – сила, действующая на каждое из тел, направлена вдоль прямой, проходящей через их центры – это явно следует из рисунка 15.5, где точки Б и Д, в которых давления наиболее различаются, лежат на этой прямой.

Однако давайте вспомним, что первоначально тела были расположены не произвольно, а вдоль большого направления системы. При таком расположении так получается, что прямая, проходящая через центры тел, проходит и через все центры кривизны слоев, разделяющих тела – это можно увидеть на рис 15.4.

Чтобы рассмотреть общий случай, расположим тела так, чтобы прямая, проходящая через их центры, не совпадала ни с одним из главных направлений системы. Тогда мы

обнаружим, что влияние второго тела на первое через изменение кривизны первого слоя исходит не из его центра, а из центра кривизны его слоя, достигшего первого тела, если вообразить, что слой этот не искажен наличием первого тела – как показано на рис.15.10.

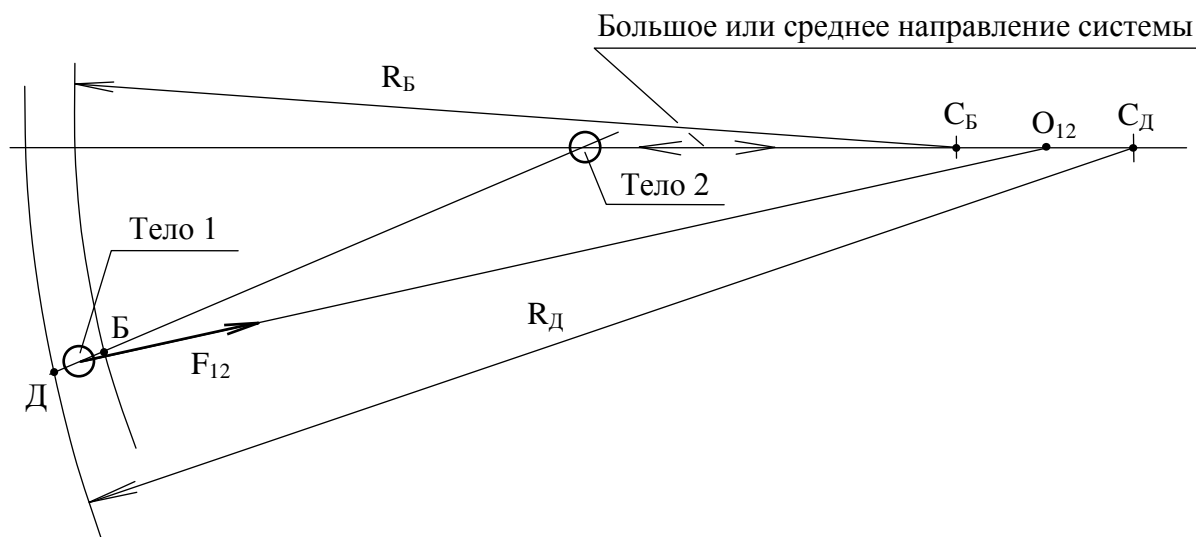


Рис.15.10. Определение направления силы, действующей на тело 1 в результате влияния тела 2.

Если быть точными, то необходимо учитывать тот факт, что слоев у второго тела, которые достигают первого тела, несколько, из которых нас интересует два – один, проходящий через точку Б, а другой – через точку Д (рис.15.10). Центры кривизны этих слоев расположены в разных точках C_B и C_D , поэтому сила F_{12} (говоря только о притяжении) у первого тела направлена в точку O_{12} , расположенную примерно посередине между этими центрами.

Сказанное в полной мере относится и к направлению силы, действующей на второе тело под действием первого.

Таким образом получается, что силы притяжения, действующие на искажающие тела от их взаимного влияния, в общем случае направлены мимо центров друг друга, но у тел одинакового размера линии их действия параллельны. Если же искажающие тела имеют разные размеры, то линии действия этих сил параллельными не будут. Эта непараллельность имеет следующее объяснение.

Если рассмотреть неискаженные формы срединных поверхностей слоев с одинаковым абсолютным номером (номером, относительно центра тела) у двух разных искажающих тел, то окажется, что у большего искажающего тела срединная поверхность более округла, ее грани выпуклы сильнее, а их центры кривизны лежат ближе к самому телу, чем у тела меньшего размера. Поэтому сила, приложенная к меньшему телу, будет нацелена (если говорить о притяжении) в точку, расположенную недалеко от большего тела. В то же время сила у большего тела будет направлена в точку, более удаленную от меньшего тела, как показано на рис. 15.11, где принято, что тело 1 больше, чем тело 2.

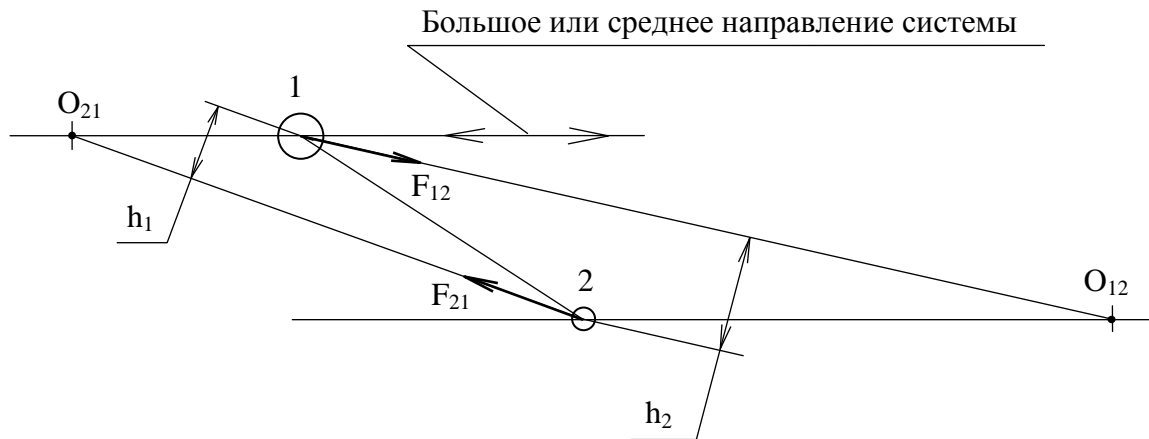


Рис.15.11. Направление сил взаимного влияния тел разных размеров.

Чтобы как-то унифицировать эту непараллельность сил, введем понятие *среднего плеча сил* h_0 . Обозначим плечо силы, действующей на второе тело относительно центра первого тела, через h_1 (рис.15.11), а плечо другой силы относительно центра второго тела – h_2 , тогда среднее плечо будет равно:

$$h_0 = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

Если расстояние между искажающими телами поддерживать постоянным, а изменять ориентацию отрезка, соединяющие их центры, то силы, приложенные к телам, оставаясь постоянными по модулю, будут все время менять направления. При этом их среднее плечо будет изменяться от некоторого максимального значения, зависящего от расстояния между телами, до нуля.

Среднее плечо будет тем ближе к нулю, чем ближе к большому или среднему направлению будет ориентирован отрезок, соединяющий центры тел. И только когда он точно совпадет с одним из этих направлений, силы будут направлены точно навстречу друг другу, что мы и наблюдали на рис. 15.5.

Заметим, что когда отрезок, соединяющий центры тел, точно совпадает с малым направлением системы, срединные поверхности слоев обоих тел направлены друг к другу короткими ребрами (рис.10.5, рис.10.6) и здесь их взаимное влияние, строго говоря, не определено. В действительности, в этом положении силы взаимного влияния направлены, скорее всего, вдоль прямой, соединяющей тела.

Теперь займемся величиной равновесного расстояния между центрами искажающих тел – расстояния, на котором силы взаимного влияния обращаются в нуль (имеется в виду только конечное расстояние, соизмеримое с размерами тел, в отличие от бесконечного, когда эти силы так же становятся равными нулю). Прежде всего подчеркнем, что понятие равновесного расстояния имеет смысл только для искажающих сфер одинакового размера.

Если вспомнить написанное ранее, равновесное расстояние n_0 выражалось в числе слоев, расположенных между центрами тел. Но мы знаем, что в целом слой имеет форму усеченного октаэдра (раздел 10), строго ориентированного по главным направлениям системы. Отсюда следует вывод, что при изменении ориентации отрезка, соединяющего центры тел в состоянии их взаимного равновесия, число слоев n_0 между ними должно

сохраняться, как если бы одно из тел находилось в середине гладкого усеченного октаэдра, а второе тело скользило бы по его поверхности. Но при этом расстояние между телами, измеренное в единицах длины, должно все время меняться.

Здесь следует вспомнить, что расчеты сил взаимного влияния тел, представленные выше, содержат, помимо уже отмеченных, еще одно существенное упрощение. Дело в том, что в выражениях (15.5) и (15.6), вместо истинных, использовано среднее повышение давления в слое, как будто бы оно одинаково у всех капель слоя. На самом деле, как мы знаем, это не так – поверхности равного давления не совпадают со срединными поверхностями слоев, а представляют собой, предположительно, поверхности, близкие к сферическим (раздел 13).

Отсюда следует, что в общем случае равновесное расстояние должно выражаться не в слоях, а в единицах длины. Результаты моделирования искаженной системы дают основание утверждать, что равновесное расстояние между центрами искажающих тел, измеренное в единицах длины (обозначим его L_0), одинаково при любой ориентации отрезка, соединяющего эти центры. Это можно представить, как если бы одно из тел находилось в центре шара радиусом L_0 , а второе скользило бы по поверхности этого шара.

Соответственно, модули сил взаимного влияния зависят только от размеров тел и длины отрезка, соединяющего их центры, но никак не зависят от положения этого отрезка относительно главных направлений.

Построим зависимость равновесного расстояния от размера тел. Она представлена на рис.15.12, где по оси абсцисс отложен объем одного из одинаковых искажающих тел, а по оси ординат – равновесные расстояния. Здесь точками обозначены расчетные значения, а плавная кривая, аппроксимирующая их, соответствует выражению:

$$L_0(N) = -126 + 81N^{1/3} \quad (15.9)$$

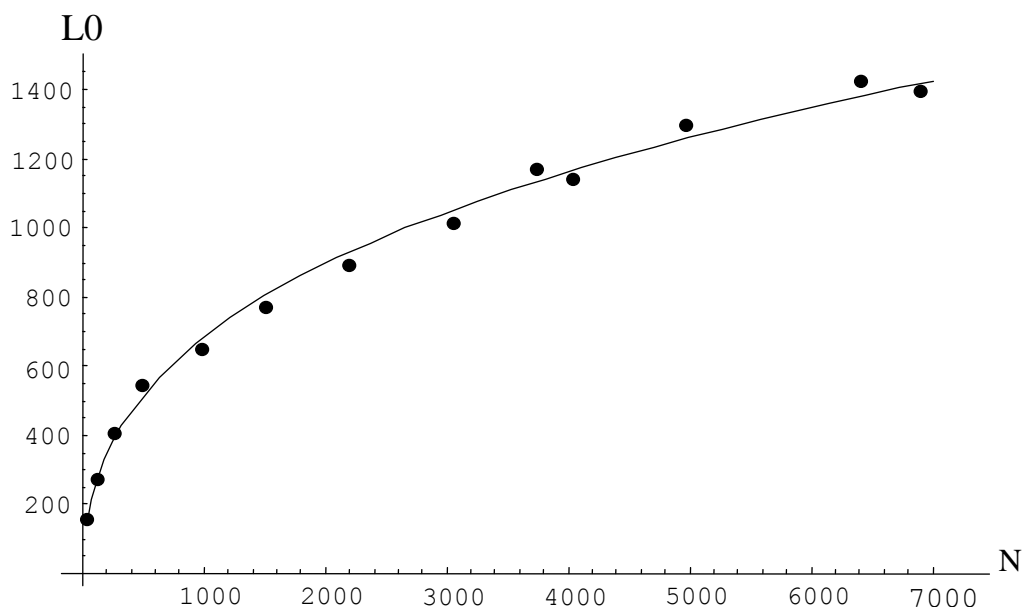


Рис.15.12. Зависимость равновесного расстояния от размера искажающих тел.

Как следует из приведенного выражения, равновесное расстояние двух одинаковых сферических искажающих тел линейно зависит от их радиусов. Перестроив последнюю зависимость так, чтобы аргументом был радиус R искажающей сферы, ее аппроксимирующее выражение примет вид:

$$L_0(R) = -126 + 131R \quad (15.10)$$

Понятие равновесного расстояния между искажающими телами приводит к представлению, что каждое тело окружено упругой оболочкой радиуса $L_0/2$, которая сопротивляется приближению к нему другого тела. Назовем такую воображаемую оболочку *упругим ореолом*. Очевидно, что рассматриваемые искажающие тела имеют сферические ореолы.

С таким понятием, как упругий ореол легко представить взаимное поведение в системе двух одинаковых тел – два упругих шара-ореола, притягиваясь друг к другу (не всегда центральными силами), приходят в соприкосновение и остаются в таком устойчивом состоянии, пока их не разделит какое-либо внешнее воздействие.

Что касается тел разных размеров, то здесь все сложнее. Начнем с того, что силы взаимного влияния у них не одинаковы – на большее тело действует большая сила. Вместе с этим, зависимости величины силы от расстояния между центрами тел у них различны, и не существует равновесного расстояния, на котором обе силы одновременно обращаются в нуль. Вместо этого для каждой пары размеров выделяется два значения расстояний – L_{\min} и L_{\max} .

Когда расстояние между центрами тел больше L_{\max} , к обоим телам приложены силы, направленные на их взаимное сближение. Когда же расстояние находится между этими значениями, то на одно из тел действует сила, направленная в сторону другого тела, а на второе – в сторону отталкивания. И, наконец, если расстояние между центрами тел меньше L_{\min} , то оба тела испытывают отталкивание с разными по величине силами.

Таким образом, если рассмотреть два искажающих тела разных размеров, то их взаимное поведение будет довольно странным – когда они сблизятся на некоторое расстояние, большее тело будет избегать контакта ореолами, а меньшее – стремиться к нему. Замечено, что чем ближе между собой размеры искажающих тел, тем ближе расстояния L_{\min} и L_{\max} к равновесному расстоянию L_0 для их среднего размера.

До сих пор речь шла только о двух искажающих телах. Вопрос о взаимном влиянии трех искажающих тел, размер хотя бы одного из которых отличается от других, довольно сложен, и здесь рассматриваться не будет. Если же имеется множество одинаковых сферических тел, то их взаимное поведение в системе будет определяться поведением их упругих ореолов, испытывающих взаимное притяжение – сферы организуются в плотную кубическую упаковку. При этом сами тела, находящиеся в центре этих сфер, станут узлами кубической гранецентрированной решетки.

Последнее будет иметь место только в том случае, если у тел не будет относительных скоростей. На самом деле, когда тела находятся на большом расстоянии друг от друга, они обладают взаимной потенциальной энергией. При их сближении эта потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию относительного движения. Дело усугубляет то, что направление сил, действующих на тела, меняется в зависимости от их относительного положения. В результате получается хаотическое движение, и если кинетическая энергия этого движения велика, то тела никогда не займут равновесного положения. Если же движение недостаточно интенсивное, тела выстраиваются в решетку, но продолжают колебаться относительно ее узлов.

На этом мы закончим изучение явлений, вызванных наличием в системе сферических искажающих тел, где сами эти тела являлись инородными для системы объектами.

Глава 4

Кластеры элементов

Выясним, какие объекты в системе, не являясь для нее инородными, могут быть искажающими телами.

16. Свойства множеств ромбододекаэдров

В предыдущей главе мы неоднократно встречались с множествами плотно уложенных ромбододекаэдров, по внешней форме наиболее близкими к сфере. Основным свойством таких множеств является *компактность*. Свойство это означает, что данное количество многогранников уложено так, что радиус описанной сферы не может быть уменьшен никакой перестановкой внешних элементов.

Компактное множество построить несложно. Допустим, у нас есть некоторое количество многогранников, которые нужно уложить компактно. Берем первые два тела и прикладываем их грань к грани – это множество из двух элементов нельзя сложить как-то иначе, поэтому оно компактно изначально. Отмечаем у них общий центр объема – в данном случае он будет лежать в середине их общей грани, как показано на рис. 16.1.

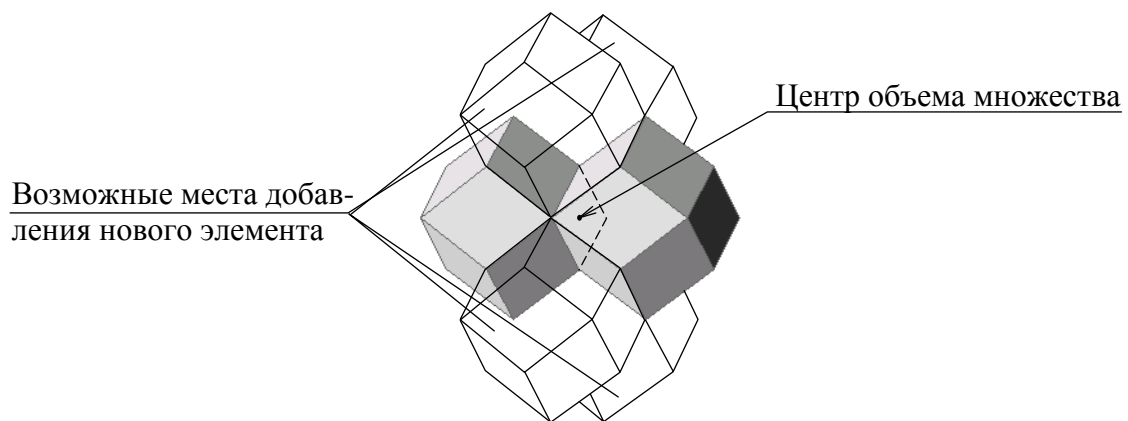


Рис.16.1. Множество ромбододекаэдров из двух элементов.

Взяв следующий многогранник, приложим его к первым двум так, чтобы его центр располагался как можно ближе к общему центру объема первых двух – таких положений будет четыре, и все они равнозначны (разумеется, многогранники всегда совмещаются по целым граням). Так мы получили компактное множество из трех ромбододекаэдров (рис.16.2) – как видим, их нельзя сдвинуть ближе друг к другу.

Четвертый многогранник присоединяется к этим трем по тому же принципу – находится такое место для него, где его центр будет расположен наиболее близко к общему центру уже построенного множества, и т.д.

Как видим, алгоритм построения компактного множества рекурсивен и может быть сформулирован так: чтобы построить компактное множество N многогранников, нужно к компактному множеству $N-1$ элементов присоединить новый элемент в том месте, где его центр будет расположен наиболее близко к общему центру предыдущего множества (вообще говоря, таких мест может быть несколько).

Покажем, что приведенный алгоритм гарантирует построение компактного множества. По условию предыдущее множество компактно. Это значит, что оно уложено так, что помещается в сферу, уменьшить которую уже нельзя перестановкой внешнего элемента. Добавление нового элемента к этому множеству неизбежно вызовет увеличение радиуса вмещающей сферы (если бы новый элемент мог уместиться в той же сфере, предыдущее множество можно было бы перестроить до более компактного, что противоречит условию). Но это увеличение радиуса будет минимальным, если новый элемент будет располагаться наиболее близко к центру предыдущего множества. Поэтому в полученном множестве нельзя переставить внешний элемент, чтобы уменьшить радиус описанной сферы, т.е. оно компактно.

Несмотря на наше доказательство, замечен один случай, когда в описанной цепочке построений компактность не соблюдается. Так, если дойти до множества из 6 элементов, то окажется, что оно некомпактно – 6 элементов нужно уложить по-другому, чтобы оно стало компактным. Но, если этого не делать, а продолжать построения, то все последующие конфигурации будут компактными.

На рисунке 16.3 показан пример компактного множества ромбододекаэдров, собранного из 1200 элементов.

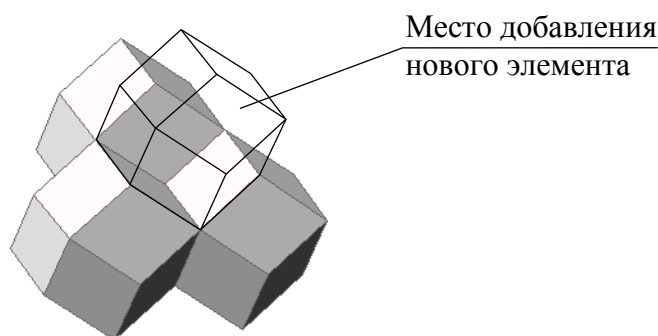


Рис.16.2. Компактное множество ромбододекаэдров из трех элементов.

Расположение наружных многогранников у компактных множеств с одинаковым числом элементов может быть различным. Почему же один и тот же алгоритм построения при одном и том же числе элементов может давать разные формы поверхности? Мы уже отмечали, что на некоторых шагах построения компактного множества при добавлении очередного элемента может оказаться несколько равнозначных позиций, где можно расположить этот элемент. При этом, выбирая определенную позицию, мы выбираем путь дальнейшего построения. На другом шаге опять возможно несколько вариантов, и т.д., поэтому ход построения множества быстро разветвляется и приводит к разным компактным формам, радиус описанной сферы у которых может несколько различаться.

Мы рассмотрели алгоритмический способ построения компактного множества, в котором все промежуточные множества (кроме одного) тоже были компактны, поэтому он позволяет построить такое множество из любого, наперед заданного числа элементов. Но можно составить такую последовательность, приводящую к компактной укладке заданного числа многогранников, в которой не все промежуточные множества будут обладать этим свойством, а только некоторые из них. Более того, можно найти такую последовательность, в которой ни на одном шаге (кроме первого) не будет компактности, и только добавление последнего элемента сделает множество компактным. Разумеется, все эти неалгоритмические способы требуют перебора

всевозможных вариантов и выбора из них таких, которые приводят к нужному результату.

Теперь рассмотрим процесс, обратный построению – отнятие от компактного множества последовательно по одному внешнему элементу. Если каждый раз отнимать элемент, центр которого наиболее удален от центра объема всего множества, то оставшаяся часть опять будет компактной – это следует из рекурсивного алгоритма построения, «прокрученного» в обратном порядке. Но если от компактного множества отнять внешний элемент случайным образом, то оставшееся множество может оказаться (и вероятнее всего окажется) некомпактным.

С другой стороны, если исходное множество не компактно, то, отняв от него случайным образом внешний элемент, возможен вариант получить компактное. Но между этими двумя случаями есть принципиальная разница - когда элемент отнимается от компактного множества, всегда есть хотя бы один шанс получить компактное. Во втором случае, когда элемент отнимается от не компактного множества, такого шанса может не быть ни одного.

Таким образом, если исходное компактное множество ромбододекаэдров разбирать по одному элементу, каждый раз отнимая случайным образом внешний многогранник, то будет большая вероятность того, что в полученном ряде конфигураций не будет ни одной компактной.

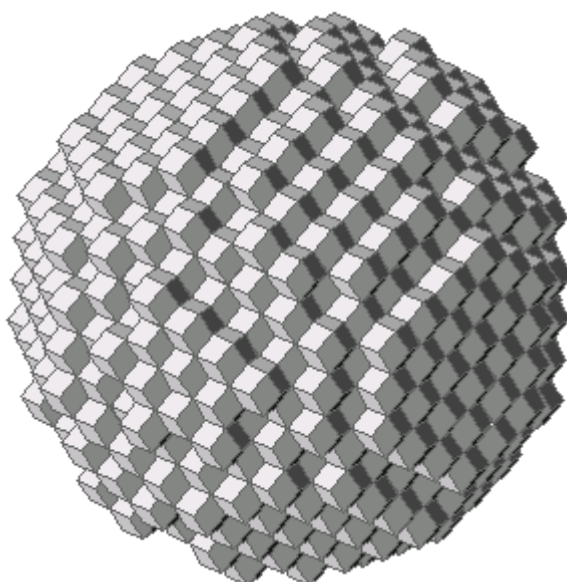


Рис.16.3. Компактное множество из 1200 ромбододекаэдров.

Рассмотренный выше алгоритмический способ построения компактного множества - единственный, который позволяет это сделать для заданного числа многогранников. Можно строить компактные множества ромбододекаэдров другим способом, но с неизвестным заранее числом элементов. Рассмотрим этот способ.

Допустим, у нас есть область пространства, плотно заполненная ромбододекаэдрами. Выберем в этой области произвольную точку и из нее, как из центра, очертим сферу некоторого радиуса $R_{сф}$. Все многогранники, которые целиком оказались внутри этой сферы, составят компактное множество. Именно этот способ применялся в численном моделировании искажения системы.

И последнее о компактности. Исходя из ее определения, можно утверждать, что любое некомпактное множество можно сделать компактным в результате конечного числа перестановок внешних элементов.

Второе свойство, которым обладают множества ромбододекаэдров, с которыми мы ранее встречались - это *гладкость* (да простят математики автора за использование их терминологии – компактные и гладкие множества здесь имеют совсем другой смысл).

Гладким множеством будем называть такое, у которого каждый внешний многогранник имеет не более 6 открытых граней, т.е. ни один из них не выступает наружу более чем наполовину.

Понятно, что название этого свойства довольно условное и никак не соответствует нашему бытовому представлению о гладкости. Как, например, можно назвать гладкими фигуры, изображенные на рис.10.3? Тем не менее, они отвечают заданному условию – на их поверхности нет элементов, выступающих более чем наполовину. Множество же, изображенное на рис.16.3, не является гладким – на его поверхности можно найти элементы, у которых более шести открытых граней.

В отличие от компактных, гладкие множества нельзя построить для любого, наперед заданного числа элементов. Более того, неизвестен прямой алгоритм построения таких множеств, даже если заранее известно, что из данного числа элементов может получиться гладкое (прямой алгоритм здесь подразумевает построение множества путем прибавления по одному элементу).

У гладких множеств есть одна особенность – существует *минимальное гладкое множество* – из меньшего, чем в нем, числа элементов гладкое множество построить нельзя. Минимальное гладкое множество имеет единственно возможную конфигурацию – оно компактно. С этим множеством вы хорошо знакомы – это та самая исходная конфигурация, составленная из 38 ромбододекаэдров, с которой мы часто имели дело.

Из любого негладкого множества плотно уложенных ромбододекаэдров, в котором содержится минимальное гладкое, можно выделить гладкое. Для этого необходимо отнимать по одному внешнему элементу, у которых больше 6 открытых граней, до тех пор, пока таких элементов не останется ни одного. Оставшееся множество, по определению, будет гладким. Однако получить гладкое множество из негладкого путем перестановок внешних элементов, вообще говоря, нельзя, поскольку, как уже говорилось, гладкое множество может получиться не из любого числа элементов.

Свойства компактности и гладкости никак не связаны между собой – компактные множества могут быть как гладкими, так и не гладкими, а среди гладких могут быть и компактные и не компактные. Каждое из этих свойств характеризует разные аспекты – компактность говорит об общей форме множества, а гладкость касается только структуры его поверхности.

Следующим свойством множеств плотно уложенных ромбододекаэдров является наличие или отсутствие симметрии поверхности. Если рассматривать только компактные множества, то симметрия их поверхности вполне определяется положением центра объема множества относительно многогранника, расположенного внутри укладки в ее середине.

Установлено, что поверхность компактного множества обладает теми же элементами симметрии, какие проходят через точку - центр его объема, но относящиеся к внутренней укладке многогранников – об этом уже упоминалось в разделе 10. Так, например, если центр объема попадает точно в середину внутреннего ромбододекаэдра, то можно гарантировать, что поверхность множества обладает всеми элементами кубической симметрии, поскольку эти же элементы симметрии, относящиеся к ромбододекаэдру, проходят через центр множества.

То же самое будет наблюдаться, если центр объема совпадает с точкой, в которой сходятся своими острыми вершинами 6 ромбододекаэдров – через нее так же проходят все элементы кубической симметрии, относящиеся к внутренней укладке.

Несколько иным будет случай, когда центр множества попадает в точку, где 4 ромбододекаэдра сходятся своими тупыми вершинами. Элементы симметрии укладки, которые проходят через эту точку, полностью совпадают с элементами симметрии правильного тетраэдра. Соответственно, такой же симметрией обладает и внешняя поверхность всего множества. Чем же отличается эта симметрия от кубической?

Набор элементов симметрии, которым обладает правильный тетраэдр, будем называть *тетраэдрической симметрией* – по тому же принципу, по которому названа кубическая симметрия. Элементы тетраэдрической симметрии показаны на рис.16.5. Перечислим их – это четыре оси 3-го порядка (рис.16.5 а), каждая из которых проходит через вершину тетраэдра и середину противоположной грани. Затем идут три оси 2-го порядка (рис.16.5 б), проходящие через середины каждой пары противоположных ребер. И, наконец, шесть плоскостей симметрии (рис.16.5 в - з), каждая из которых проходит через одно ребро многогранника и середину второго - противоположного ему ребра.

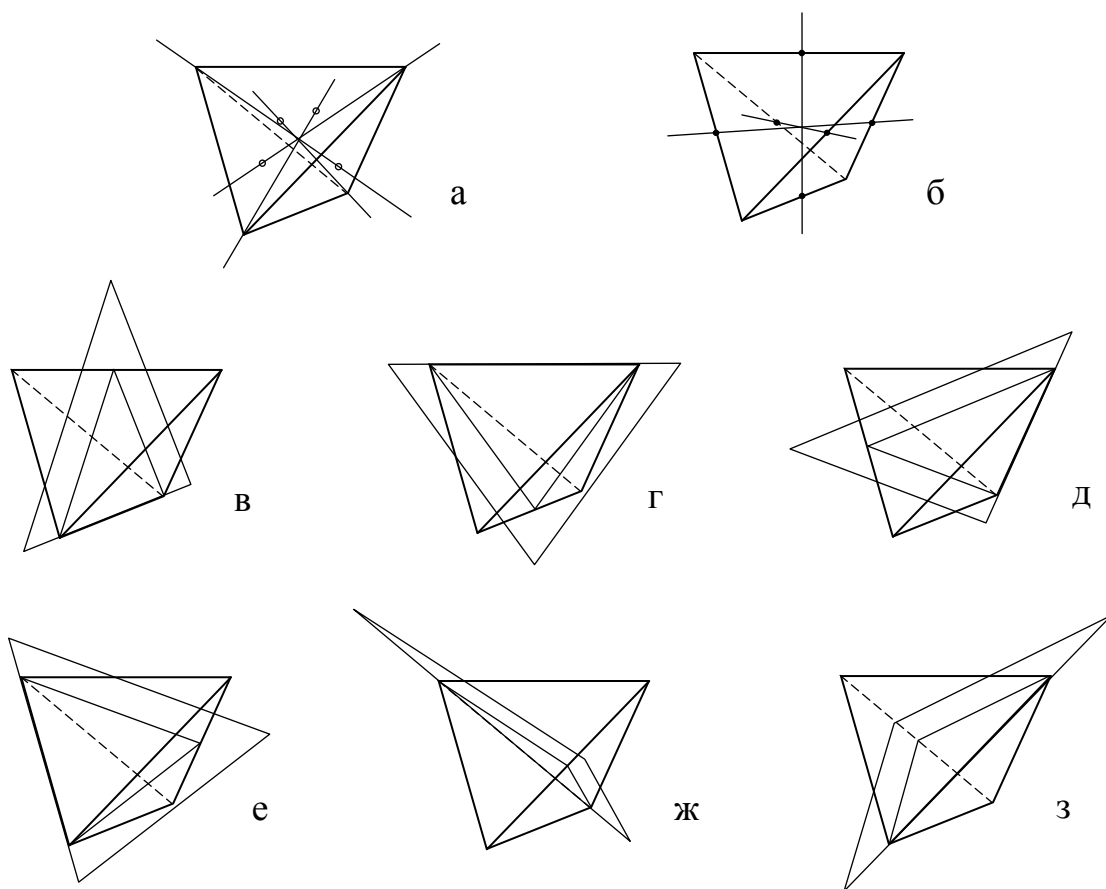


Рис.16.5. Элементы тетраэдрической симметрии.

Одно из множеств ромбододекаэдров, обладающих тетраэдрической симметрией, и состоящее из 128 элементов, показано на рис.16.6. На этом множестве проведены три оси 2-го порядка.

Мы рассмотрели условия, при которых поверхность компактного множества обладает симметрией. Если же центр объема множества расположен в точке, не принадлежащей ни одному элементу симметрии внутренней укладки, не будет иметь никакой симметрии и наружная поверхность этого множества.

Следует отметить, что минимальное гладкое множество, состоящее из 38 элементов, обладает кубической симметрией, а его центр расположен в точке, где сходятся 6 острых вершин ромбододекаэдров.

Как уже говорилось, компактное множество можно составить из любого числа элементов, поэтому каждому целому числу соответствует такое множество. Проведем следующую операцию – из непрерывного ряда целых чисел выделим те, которые соответствуют и компактным, и гладким множествам. Полученный ряд станет несколько разреженным, поскольку, повторим, гладкое множество можно составить не из любого числа многогранников.

Продолжая подобную операцию, выделим из последнего ряда те числа, которые соответствуют компактным гладким множествам, имеющим кубическую или тетраэдрическую симметрию. В результате этого у нас останется довольно редкий ряд целых чисел, указывающих размер множеств, обладающих всеми тремя рассмотренными свойствами.

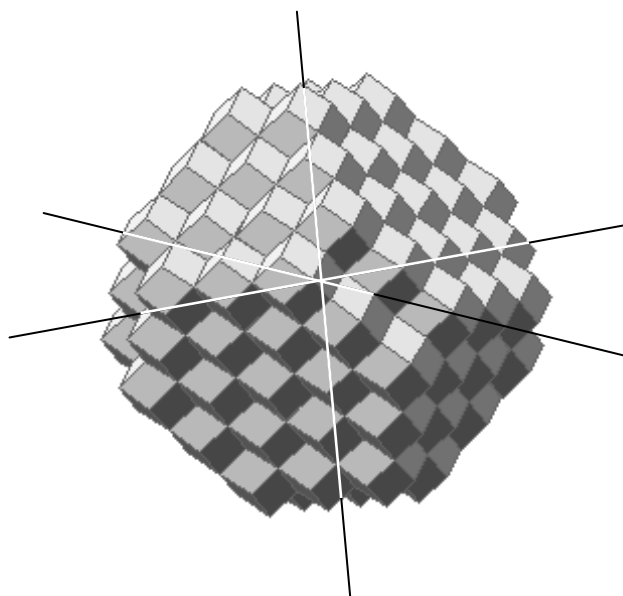


Рис.16.6. Множество ромбододекаэдров, обладающее тетраэдрической симметрией

Начало этого ряда выглядит так: 38, 68, 79, 116, 128, 135, 140, 176, 201, 204, 236, 240, 260, 288, 321, 336, 369, 370 и т.д. Как видите, ряд этот довольно случайный и вряд ли здесь можно выделить какую-либо закономерность.

17. Кластер элементов

Вернемся мысленно на несколько разделов назад, в то время, когда мы только познакомились с регулярной системой сжатых капель. Тогда еще ничего не искажало ее структуры, а однообразный рисунок скругленных ромбододекаэдров заполнял все ее пространство.

Представим себе, что в неискаженной системе живет некое существо, которое своим присутствием никак не нарушает ее порядка, а занимает, например, пустоты между каплями. Однако это существо, хотя и не искажает собой структуру, тем не менее, может делать различные манипуляции с каплями – скажем, взять своими ладонями горсть капель и сжать их в комок, как дети из снега лепят снежки. Другими словами, оно может влиять на систему не своим присутствием, а своими действиями.

Допустим, в результате этих действий в системе появилось почти сферическое образование из некоторого множества капель, выделенное из общей структуры, и представляющее собой как бы обособленное тело – назовем его *кластером элементов*, или просто *кластером* (английское слово cluster означает множество однотипных элементов, сжатых вместе, что вполне подходит к нашему случаю). На рисунке 17.1 показано одно из возможных сечений такого кластера среди капель системы (сам кластер затемнен).

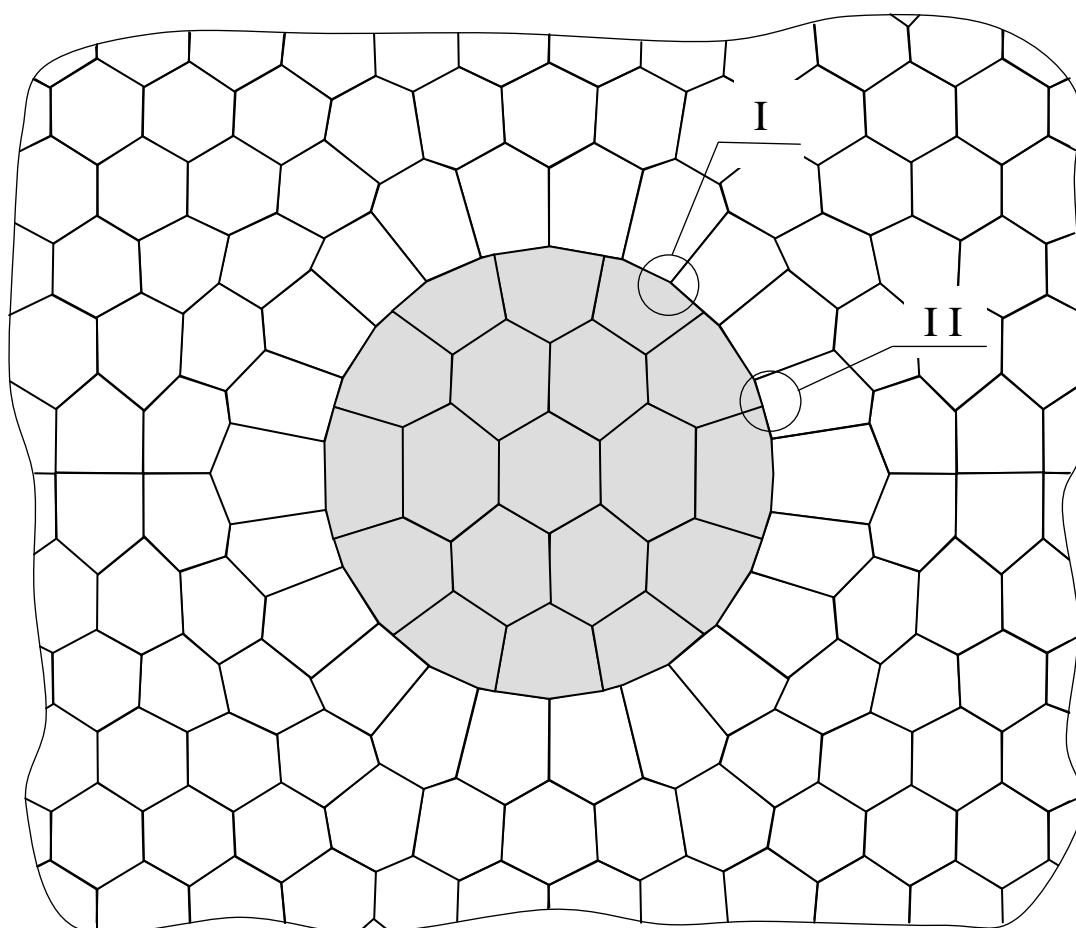


Рис.17.1. Кластер элементов.

Мы видим, что кластер является обыкновенным искажающим телом, со всеми присущими ему свойствами. На основании этого, казалось бы, можно рассуждать так:

повышенное давление, которое кластер создает в окружающих каплях, само способствует удержанию его в сжатом состоянии, а однажды образовавшись в системе, он может существовать долго, пока его не разрушит какое-нибудь внешнее воздействие.

Так может показаться на первый взгляд, но на самом деле такой кластер не просуществует и мгновения – лишь только наше фантастическое существо, «слепившее» этот комочек из капель, разожмет свои ладони, как все эти капли, распрямившись, снова займут свое место в регулярной структуре, и только волны колебаний разнесут во все стороны ту энергию, которая была затрачена на его образование.

Что же не дает этому кластеру оставаться в виде искажающего тела? Дело в том, что существование в системе такого обособленного агрегата капель противоречит правилу сопряжения поверхностей, с которым мы познакомились в разделе 6. В самом деле, рассмотрим на рис.17.1 место в сечении, обозначенное I - оно изображено крупно на рис. 17.2. Мы видим здесь место сопряжения трех капель – капля 1 принадлежит кластеру, а капли 2 и 3 входят в его окружение. Поскольку неизвестно соотношение давлений в каплях, на последнем рисунке представлено три варианта: первый – давления в каплях кластера и окружения одинаковые (рис. 17.2 а), второй - давление в капле 1 больше, чем в каплях 2 и 3 (рис. 17.2 б) и, наконец, третий вариант - давление в капле 1 меньше, чем в каплях 2 и 3 (рис. 17.2 в). При этом давления в каплях 2 и 3 везде считаем одинаковыми.

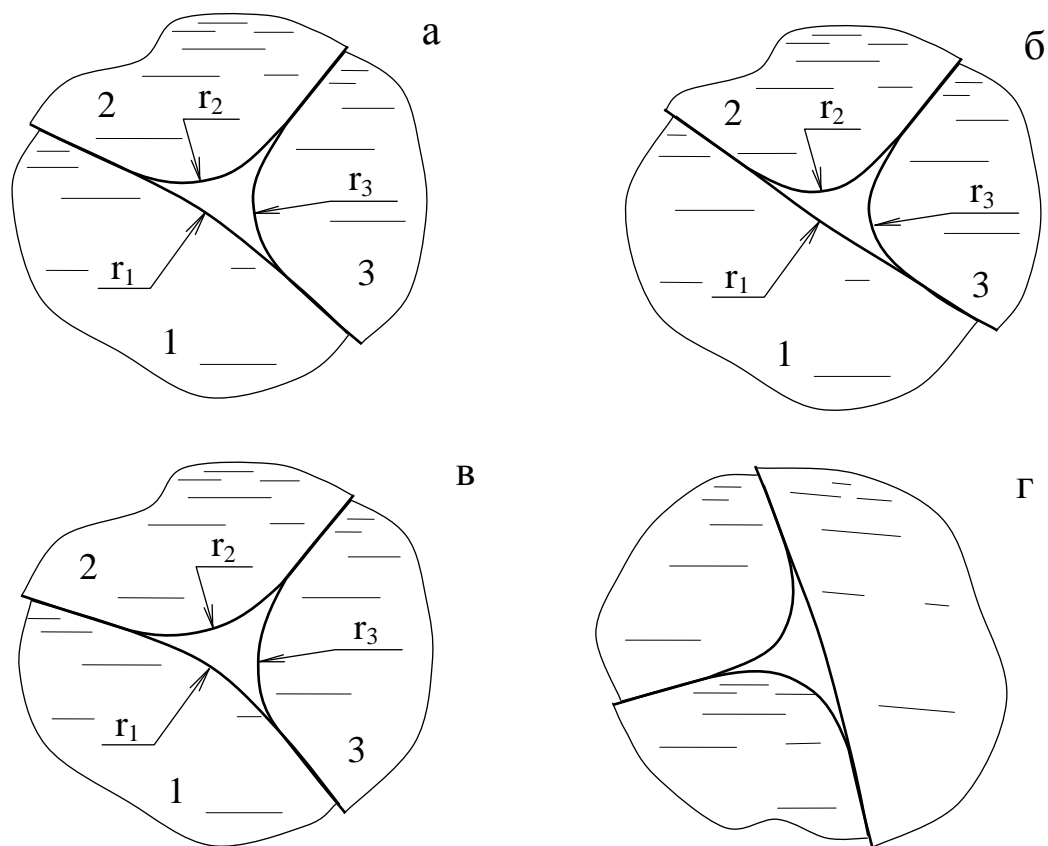


Рис.17.2. Сопряжения кластера и капель окружения.

Рассматривая первый вариант, видим, что при равенстве давлений во всех каплях, радиусы свободных поверхностей r_1 , r_2 и r_3 должны быть одинаковыми, но при данном взаимном расположении контактных поверхностей это невозможно геометрически.

Во втором варианте, когда давление в капле кластера больше, чем давление в окружающих каплях, абсурдность построения очевидна – вместо того, чтобы иметь радиус свободной поверхности r_1 меньше, чем r_2 и r_3 , свободная поверхность капли кластера оказалась вогнутой, чего вообще быть не может.

Рассмотрим третий вариант, когда давление в кластере меньше давления в окружающих каплях. Соответствующее этому случаю изображение на рис. 17.2 В выглядит вполне допустимо – радиус r_1 несколько больше, чем r_2 и r_3 , как и должно быть при данном взаимном расположении поверхностей контакта. Тогда проверим участок II на рис. 17.1, где две капли кластера сопрягаются с одной каплей окружения – на рис. 17.2 Г этот участок изображен крупно. Здесь мы видим, что если давление в кластере меньше, чем в окружающих каплях, поверхности контакта прогнуты в сторону кластера, а свободная поверхность наружной капли оказывается вогнутой, чего опять-таки быть не может.

Таким образом установлено, что при любых соотношениях давлений наш кластер, как устойчивое образование, существовать не может, а фантастическое существо, обитающее в системе, делает свою работу впустую. Этот неутешительный вывод следует из свойств жидких тел, с которыми мы имели дело до сих пор. Однако все, что написано в этой книге до этого, объединяет общий подход – все явления рассматривались статически, и нигде не принимались в расчет силы инерции.

Попробуем добавить к тем факторам, которые определяют поведение объектов в системе, еще инерционные силы. Тогда, рассматривая кластер элементов, можно допустить несоблюдение правила сопряжения поверхностей ввиду действия в жидкости инерционных сил. Если представить, что кластер не стоит неподвижно, а движется с некоторой скоростью, то уже нет необходимости ожидать соблюдения каких-то условий от радиусов поверхностей кластера и окружающих капель, поскольку эти поверхности скользят друг по другу, а инерционные силы не дают им принять статические значения кривизны.

Таким образом, если наше фантастическое существо будет не только сжимать капли в комок, но и бросать его, чтобы он двигался в системе со скоростью, превышающей некоторую *критическую*, тогда кластер действительно будет существовать неограниченно долго, пока по каким-то причинам не потеряет скорость.

Сказанное выше допускает принципиальную возможность существования в системе обособленных групп элементов, но не иначе, как в состоянии движения. Однако возникает вопрос о возможной причине выделения таких кластеров из регулярной структуры и обладания ими необходимой скорости – не можем же мы, в самом деле, надеяться на фантастические существа.

Зададим себе вопрос – может ли в неподвижной системе что-либо самопроизвольно произойти? Ответ очевиден – в неподвижной системе самопроизвольно ничего произойти не может. Такая застывшая, мертвая система будет оставаться неподвижной бесконечно долго, что, разумеется, не представляет для нас никакого интереса. Поэтому добавим к четырем исходным условиям нашей теории (раздел 1), еще одно – пятое: во всем множестве сжатых капель постоянно происходят колебания различной частоты и амплитуды, волны которых распространяются по системе в различных направлениях.

Причину первоначального возникновения этих колебаний, как и причину первых четырех условий, мы не устанавливаем, приняв их аксиомами, но механизм поддержания однажды возникших колебаний в системе будет описан в последнем разделе.

Чтобы рассматривать образование кластеров как результат колебаний в системе, нам потребуется понятие, которое раньше встречалось только один раз, понятие это – вероятность наступления случайного события. Начнем с простого примера. Представьте себе, что вы стоите внутри плотной толпы людей, которая постоянно находится в

волнении. Какова вероятность того, что в какой-то момент этого волнения вас одновременно толкнут со всех четырех сторон ваши стоящие рядом соседи?

Не ставя цель вычислить точное значение, можно предположить, что вероятность этого события очень мала, тем не менее, вряд ли кто будет утверждать, что она равна нулю. Усложним условие. Допустим, что вы стоите в такой же плотной толпе вместе со своими друзьями, собравшимися вместе тесной группой. Какова теперь будет вероятность того, что уже всю вашу группу одновременно толкнут со всех сторон окружающие?

Не нужно быть математиком, чтобы сказать, что если в первом случае вероятность была крайне малой, то во втором случае эта вероятность чудовищно мала, почти нулевая. Если отбросить эмоции, то на последний вопрос следует ответить, что вероятность этого события выражается малым числом, близким к нулю, но, что самое главное для нас, не равным нулю. Это значит, что даже крайне маловероятное событие обязательно наступит, если очень долго ждать. То есть, стоя в такой толпе много месяцев, а может быть и лет, мы хотя бы раз почувствуем одновременный толчок со всех сторон.

Здесь мы упомянули время, но на самом деле, когда речь идет о случайном событии, понятие времени излишне. В самом деле, представьте себе, что всю эту толпу вместе с вами снимают, допустим, на пленку в течение всего долгого периода, пока не наступит ожидаемое событие. После этого воспроизводят изображение, но не с той скоростью, с которой снимали, а вдвое быстрее. Движения толпы окажутся ускоренными, а время до нужного события сократится вдвое. Изменяя скорость воспроизведения, мы изменяем скорость колебаний толпы, а вместе с этим – и длительность периода до наступления события.

Таким образом, если случайное событие наступает в результате колебательных процессов, то вероятность этого события определяет не время, а какое количество колебаний, в среднем, должно произойти между двумя этими событиями.

В данном случае одно колебание – это одно испытание, один бросок игральные костей в задаче на вероятность. Требуемое сочетание исходов наступает в результате некоторого количества бросаний, не зависимо от того, сколько это заняло времени.

Возвратимся к нашей системе, по которой во всех направлениях «гуляют» различные волны. Ранее уже отмечалось, что в системе все волны продольно-поперечные, но соотношение между продольной и поперечной составляющей колебаний зависит от направления распространения волны относительно главных направлений системы.

Из всевозможных колебаний выделим только те, которые распространяются вдоль малых направлений системы, т.е. идут вдоль цепочек элементов – в этом направлении волны имеют наиболее ярко выраженный продольный характер, где растяжения чередуются со сжатиями цепочки.

На рис.17.3 изображена часть одной цепочки элементов, когда в ней идут продольные колебания. Если рассматривать упрощенную физическую модель этой цепочки, то ее можно представить в виде последовательности материальных точек, в каждой из которых сосредоточена вся масса капли, соединенных пружинами, моделирующими упругость капель – как показано на рисунке 17.3 слева вверху. При этом материальные точки имеют только одну степень свободы – могут перемещаться вдоль цепочки. Проведем ось x через центры масс элементов вправо, а начало координат поместим в центре произвольного элемента.

Когда по цепочке идет продольная волна, элементы колеблются вдоль оси x . Согласно физической модели, это гармонические колебания, при которых смещение, скорость и ускорение каждого центра элемента изменяются от времени по синусоидальному закону.

Выберем такой момент колебаний, когда центр элемента, совпадающего с началом координат, занимает крайнее левое положение. В это же мгновение измерим смещения всех остальных элементов, и отложим эти смещения в некотором масштабе вниз от оси x , если элемент сдвинут влево от среднего положения, и вверх – если элемент сдвинут вправо. Соединив отмеченные точки плавной линией, получим кривую смещений центров элементов в данный момент.

Проведем такие же построения для скоростей элементов, откладывая их значения в некотором масштабе вниз от оси x , если скорость элемента направлена влево, и вверх – если элемент движется вправо. Плавная линия, проведенная через отмеченные точки, является кривой скоростей элементов, и представляет собой обыкновенную синусоиду. Кривые смещений и скоростей элементов цепочки, построенные для одного момента колебаний, изображены на рис.17.3.

Обратим внимание на кривую скоростей. Очевидно, что в любой момент колебаний в цепочке можно выделить группы элементов, в каждой из которых все элементы движутся только в одну сторону с небольшим разбросом скоростей Δv и со средней скоростью $v_{\text{ср}}$ – на рисунке две такие группы заштрихованы, а их скорости направлены навстречу друг другу. Как видно из рисунка, чем меньше элементов включено в группу, тем разброс скоростей у этих элементов меньше, а их средняя скорость выше.

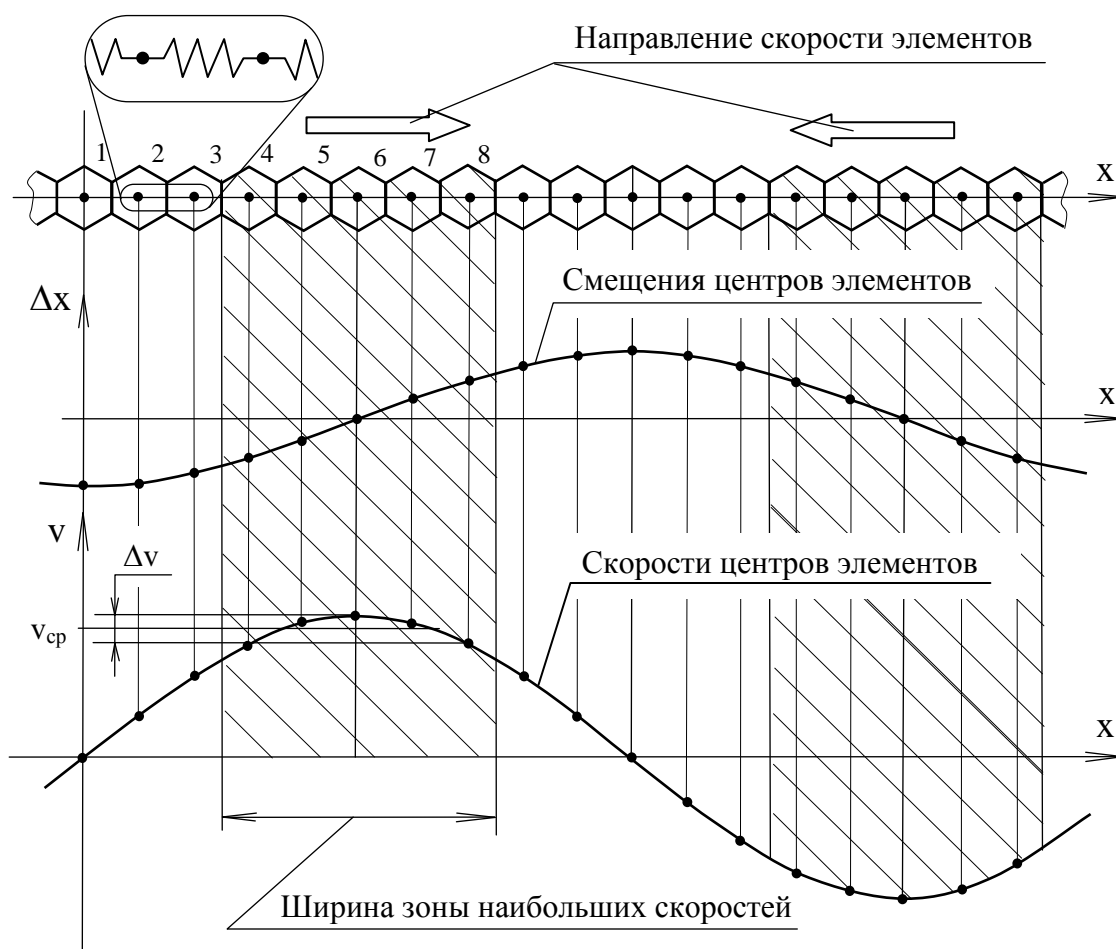


Рис.17.3. Продольные колебания в цепочке элементов.

Понятно, что продольная волна в системе распространяется в каком-то направлении не по одной цепочке, а сразу по большому количеству сомкнутых параллельных цепочек. Возьмем две плоскости, перпендикулярные осям цепочек, и выделим ими один участок системы, в котором все элементы в данный момент движутся в одну сторону со средней скоростью $v_{\text{ср}}$ – назовем этот участок *зоной наибольших скоростей* или просто *зоной*, а расстояние между параллельными плоскостями – *шириной зоны* (рис.17.3).

Событие, которое может привести к образованию кластера, состоит в том, что в некоторой области пространства пересекутся зоны наибольших скоростей у колебаний во всех шести малых направлениях. Если ширину зон во всех направлениях принять одинаковой, то область их пересечения будет иметь форму ромбододекаэдра, в которую попадут элементы, имеющие наибольшую скорость одновременно во всех колебаниях. Однако названного условия недостаточно – необходимо так же, чтобы скорости элементов во всех зонах были направлены в одно полупространство.

Последнее условие иллюстрируется на рис.17.4, где показан ромбододекаэдр – пересечение зон наибольших скоростей, а из его граней исходят стрелки, показывающие необходимые направления средних скоростей в каждой зоне. Если через центр ромбододекаэдра провести плоскость, то можно найти такое ее положение, когда все стрелки окажутся по одну сторону от этой плоскости. Данное условие гарантирует, что при векторном сложении этих скоростей модуль результирующего вектора будет наибольшим из возможных.

Теперь выясним, как будет выглядеть множество элементов системы, попавших в такой ромбододекаэдр. На рис.17.3 мы видели, что ширина зоны выражается количеством элементов цепочки, включенных в зону, поэтому и вид множества будет зависеть от этого размера. На рис.17.5 показаны множества элементов, попавших в область пересечения зон одинаковой ширины, где рядом с каждым изображением стоит число, обозначающее эту ширину. Здесь даны только первые пять множеств, но их построение можно продолжать и для более широких зон.

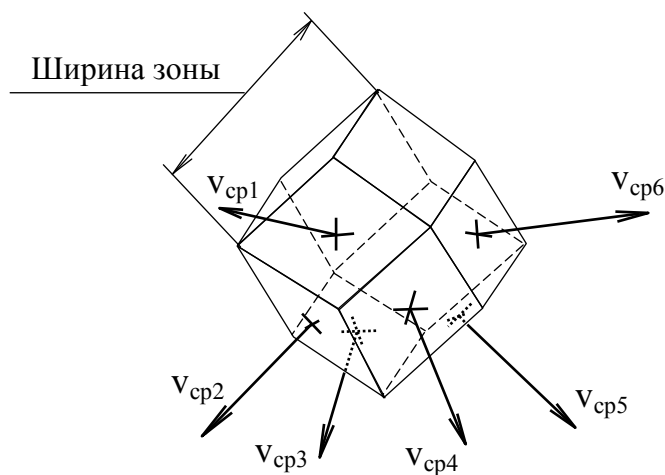


Рис.17.4. Область пересечения зон наибольших скоростей одинаковой ширины.

Если произойдет крайне маловероятное событие, когда в одной точке пространства встретятся продольные волны в шести малых направлениях, а зоны наибольших скоростей всех этих колебаний пересекутся с выполнением нужного условия, то все элементы, попавшие в это пересечение, получат такой суммарный однонаправленный импульс, какой не имеет ни один окружающий их элемент.

Как видно из рисунка 17.5, каждое множество имеет в основном вид октаэдра, а если провести из его центра вектор общего импульса его элементов, то этот вектор пройдет примерно через ребро октаэдра – условия наиболее благоприятные для того, чтобы данное множество «выскользнуло» из регулярной структуры и начало самостоятельное существование в системе. Однако на этом пути к свободе есть некоторые препятствия.

Зададим себе вопрос - может ли отдельный элемент системы начать свободное движение среди таких же элементов, если ему одному сообщить большой импульс? С

одной стороны, как ранее отмечалось, любое тело может двигаться в системе, если ему придать скорость, но это относилось к телам, не входящим в структуру. С другой стороны один элемент – это составляющая структуры, и он всегда остается в ней, где бы ни находился, поэтому его свободное перемещение представляется невозможным.

На основании сказанного предположим гипотезу – если элемент принадлежит некоторому множеству и имеет более шести открытых граней, то он не может двигаться относительно окружающих элементов вместе с этим множеством. В этом случае он больше «погружен» в окружающие элементы, чем в свое множество.

Предложенная гипотеза имеет следующие следствия. Первое множество, из показанных на рис. 17.5, полностью состоит из элементов, у которых по восемь открытых граней, поэтому оно никогда не сможет вырваться из структуры системы.

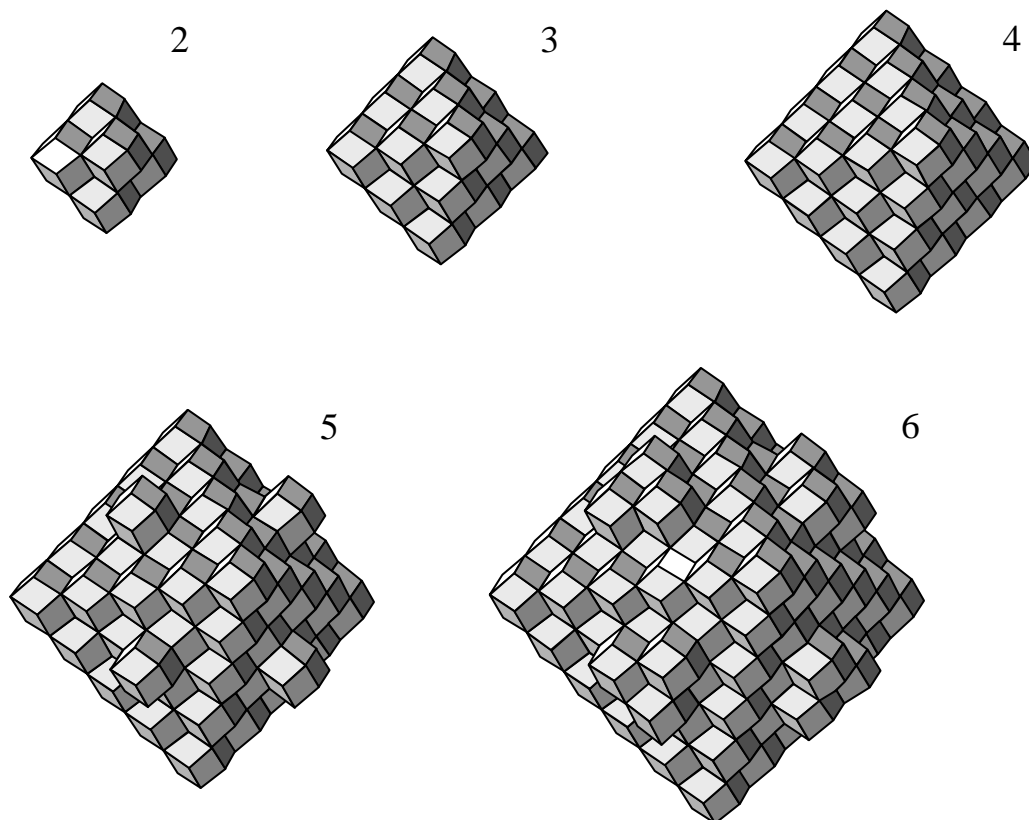


Рис.17.5. Множества элементов системы, попавших в пересечение зон.

Во втором множестве, с цифрой 3, только элементы в вершинах октаэдра имеют по 8 открытых граней, а у остальных внешних элементов – по пять. Если же от этого множества отделить угловые элементы, то у оставшихся станет по семь открытых граней, и это множество все равно останется неспособным к самостоятельному движению. В конце концов, если оно и сдвинется с места, то тут же вернется в общую структуру.

Только третье множество из показанных на рисунке (с цифрой 4), после отделения от него угловых элементов останется устойчивым, способным к самостоятельному существованию – это будет то самое минимальное гладкое множество, состоящее из 38 элементов, которое нам хорошо знакомо. Остальные множества так же, сбросив с себя

лишние элементы до ближайшей гладкой конфигурации, становятся самостоятельными устойчивыми образованиями, существующими до тех пор, пока движутся.

Из описанного процесса образования кластеров можно сделать вывод, что исходной конфигурацией для них всегда служит компактное, гладкое множество ромбододекаэдров, обладающее кубической или тетраэдрической симметрией – такие множества будем называть *устойчивыми множествами* – их размеры образуют числовой ряд, начало которого приведено в конце предыдущего раздела.

Является ли равновероятным появление кластера из устойчивого множества любого размера? Видимо, нет, и вот почему. Описанный механизм образования кластеров представляет идеальное сочетание благоприятных факторов – зоны наибольших скоростей всех колебаний пересекаются строго в их серединах, «выжимая» наибольшие скорости для элементов кластера.

Понятно, что более вероятным будет другое, когда большинство зон войдут в пересечение не областью их максимальных скоростей, а сдвинуто в сторону от максимума (если, например, на рис. 17.3 в пересечение войдут не элементы 4, 5, 6, 7 и 8, отсчитывая от начала координат, а элементы 3, 4, 5, 6, 7), тогда средняя скорость у них будет меньше. Но для образования кластера все его элементы должны получить какой-то минимально необходимый импульс, и чем меньше элементов входит в пересечение зон, тем больше вероятность, что их импульс превысит необходимый. Таким образом, наиболее вероятным будет появление кластеров минимально возможного размера, т.е. состоящих из 38 элементов, а для других размеров вероятность будет значительно меньше.

Рассмотренный процесс образования кластеров в результате случайного совпадения колебательных процессов в системе является редким примером того, как часть распределенной в пространстве энергии становится связанной с определенным объектом. Волны, отдав частично свою энергию, уменьшают интенсивность, а группа элементов, получив ее в виде энергии искажения (и еще одного компонента, который рассмотрен в следующем разделе), и обретя кинетическую энергию, становится искажающим телом.

Описанный в прошлых разделах процесс образования искажающей сферы из исходной конфигурации состоял в самопроизвольном изменении поверхности тела за счет его внутренних ресурсов. Каким же образом в данном случае угловатое, граненое множество капель становится гладким искажающим телом? Ведь именно этот переход требует основной затраты энергии

В момент покидания своего места в структуре системы, кластер обладает большой кинетической энергией, обозначим ее E_1 . Чтобы он начал движение относительно окружающих элементов, внешние выступы кластера должны смяться, а впадины его поверхности сами смять входящие в них выступы окружающих капель. При этом происходит одновременный поворот всех поверхностей контакта, отделяющих кластер от окружения, в результате чего он приобретает гладкую (уже в прямом смысле), обтекаемую форму.

Из раздела 5 мы знаем, что поворот поверхности контакта капель требует совершения работы – именно в результате этих поворотов преобразуется поверхность кластера и искажается окружающая структура. Именно эта «притирка» поверхностей требует совершения работы искажения A_d , которая берется из единственно возможного источника – исходной кинетической энергии E_1 .

Если исходной энергии достаточно для искажения системы таким искажающим телом, кластер вырвется из общей структуры. Но этого мало – остатка энергии должно хватить, чтобы после высвобождения кластер имел скорость, превышающую критическую, необходимую для его устойчивого существования. Иначе он тут же разрушится, и вернет системе приобретенную энергию в виде тех же колебаний, но уже не обязательно продольных.

Обозначим кинетическую энергию кластера, которая у него осталась после того, как он стал искажающим телом – E_k . Тогда имеет место простое равенство:

$$E_1 = A_d + E_K + \Delta E_S,$$

где: ΔE_S – увеличение энергии внешних капель кластера – будет рассмотрено в следующем разделе.

Таким образом, кластер уносит с собой всю энергию, которую передала ему система при его образовании.

Описанный процесс формообразования гладкого кластера вовсе не означает, что он всегда становится сферическим, каким мы привыкли видеть искажающее тело - используемая ранее сферическая форма упрощала исследование его свойств.

По всей видимости, сферическим будет только минимально возможный кластер с $N = 38$ (мы его будем называть *минимальным кластером*), а на форму более крупных кластеров накладывает свои особенности исходная конфигурация. На рис.17.6 для примера показаны две исходные конфигурации, а рядом – соответствующие им формы кластеров в состоянии искажающего тела.

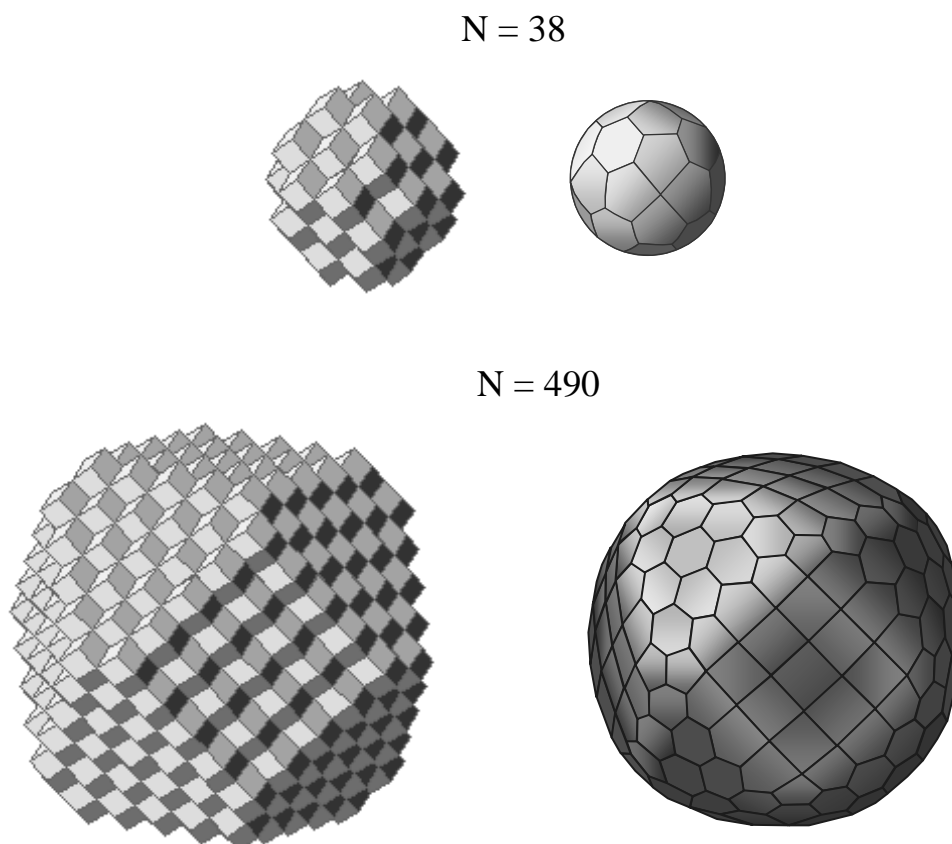


Рис.17.6. Исходная конфигурация кластера и его форма в свободном состоянии.

В заключение отметим следующее. Очевидно, что исходная конфигурация кластера, являясь частью системы, имеет оси симметрии, строго ориентированные вдоль главных направлений. Когда же кластер становится самостоятельным телом, он уже не привязан к главным направлениям, и может быть повернут вместе со своими осями симметрии в произвольное положение.

18. Энергетические особенности искажающих тел, представленных кластерами

После того, как мы определили кластерную природу искажающих тел, уже нельзя считать их сплошными жесткими сферическими образованиями, какие рассматривались ранее – новое строение требует внесения поправок в изученные свойства этих тел.

Первая поправка вызвана наличием пустот внутри кластера. Когда маленький участок системы выделился в виде самостоятельного объекта, давление вокруг него повысилось. От этого увеличилось давление в его каплях, радиусы их свободной поверхности уменьшились, а объемы пустот сократились. В результате объем всего кластера стал немного меньше.

Но что значит уменьшение объема тела в такой системе? Это значит, что внешние силы совершают работу на его сжатии, а работа эта переходит в дополнительную энергию капель, как самого кластера, так и находящихся вокруг него.

Каким образом происходит увеличение энергии капель при их сжатии, мы уже знаем – с ростом давления жидкость глубже входит в углы ячеек, увеличивая поверхность. То же самое происходит и в каплях системы, окружающих кластер – их микроскопические смещения к центру кластера при уменьшении его объема приводят к более тесному прижатию капель к друг другу, что так же вызывает увеличение их поверхности.

Последнее обстоятельство, вполне вероятно, приводит к дополнительному повышению давления вокруг искажающего тела сверх значений, показанных на рис.13.5. Однако мы не будем учитывать это повышение, считая его незначительным.

Найдем общее выражение дополнительной энергии ΔE_v , полученной кластером в результате уменьшения его объема. Чтобы не усложнять расчет, сохранив его суть, введем некоторые упрощения. Первое упрощение касается истинной формы кластера. Поскольку, как мы видели на рис.17.6, форма кластера в общем случае не является сферической, давление на его поверхность будет различным, соответственно кривизне поверхности в каждой точке. Мы же пока не будем учитывать это различие, по-прежнему считая эту поверхность сферической, а давления везде одинаковыми.

Второе упрощение – примем контактные давления капель на поверхность кластера равными среднему давлению в каплях первого слоя, не учитывая их увеличения за счет искривления поверхности контакта.

И последнее – не будем учитывать тот факт, что поверхность кластера не сплошная, а изрезана углублениями между его наружными каплями, поэтому фактически пятна контакта с каплями системы будут меньшей площади, чем в расчете.

В дополнение ко всему будем считать, что все ячейки кластера уменьшают объем в одинаковой степени.

Итак, упрощенное выражение дополнительной энергии от сжатия кластера будет иметь вид:

$$\Delta E_v = k p_{cp1} N \Delta P, \quad (18.1)$$

где: k – коэффициент контакта, введенный в разделе 15;

p_{cp1} – среднее давление в каплях первого слоя;

N – число элементов в кластере;

ΔP – уменьшение объема одной ячейки кластера.

Рассмотрим каждую из входящих в это выражение величин.

Коэффициент контакта k найдем из выражения (15.7), приняв отступы δ пятен контакта везде одинаковыми и равными:

$$\delta = \frac{f}{p_{cp1}} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

где: f – коэффициент поверхностного натяжения жидкости;

φ - двугранный угол ячейки, определяющий отступ пятна контакта.

В последнем выражении, как и везде ранее, принимаем коэффициент поверхностного натяжения f равным единице, помня, что при реальном значении f пропорционально изменится и давление p_{cp1} , так что отношение f / p_{cp1} , равное радиусу свободной поверхности жидкости, останется тем же.

Величину двугранных углов φ , окаймляющих нижнюю грань ячейки первого слоя, которая касается поверхности кластера, найдем, максимально упростив картину сечения, изображенного на рис.15.8 – примем, что эти углы у всех ячеек одинаковы, а поверхности контакта – плоские. Тогда:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{N_{окр}},$$

где: $N_{окр}$ – число капель первого слоя, попадающих в сечение кластера плоскостью, проведенной через его центр.

Следующая величина, входящая в выражение (18.1) – среднее давление p_{cp1} в каплях первого слоя. Оно равно сумме среднего избыточного давления, найденного из выражения (13.9), и давления p_{∞} в каплях неискаженной системы (раздел 13):

$$p_{cp1} = \Delta p_{cp1} + p_{\infty}.$$

Наконец, последняя величина, требующая пояснения – уменьшение объема ΔP каждой ячейки в кластере в результате повышения давления от p_{∞} до p_{cp1} . Ее можно приближенно найти, применив выражение (9.12) зависимости объема ячейки от радиуса свободной поверхности капли:

$$\Delta P = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(\left(0.687 + 0.560 \frac{1.0}{p_{\infty}^{2.29}} \right)^3 - \left(0.687 + 0.560 \frac{1.0}{p_{cp1}^{2.29}} \right)^3 \right)$$

Значения выражения (18.1), найденные для кластеров различных размеров, представлены в виде точек на рис.18.1. Линия, аппроксимирующая эти значения, - почти прямая.

Заметим, что, по всей видимости, дополнительная энергия кластера ΔE_v имеет своим источником не исходную кинетическую энергию E_1 , дающую кластеру «жизнь», а подтягивается к нему из системы, вследствие его внутренних изменений.

Следующая поправка к свойствам искажающего тела, обусловленная его кластерным строением, относится к каплям, составляющим его поверхность. Ранее, рассматривая преобразование жесткого тела из исходной конфигурации в сферу, мы наблюдали значительные изменения формы ячеек первого слоя. Эти изменения были вызваны необходимостью капель соседствовать с гладкой поверхностью искажающего тела. Теперь в таких же условиях оказываются и наружные капли кластера – для свободного движения в системе он должен иметь гладкую внешнюю поверхность. Поэтому форма наружных ячеек кластера становится похожей на форму ячеек первого слоя, только обращенная внутрь (рис.17.1). Соответственно, эти капли приобретают и примерно такое же увеличение поверхности.

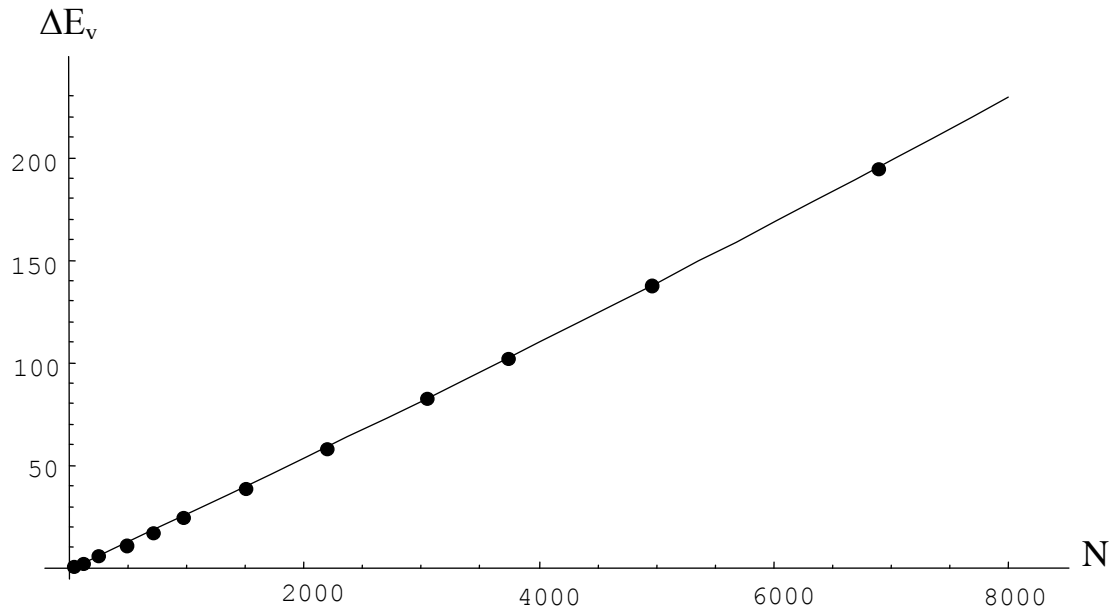


Рис.18.1. Зависимость энергии сжатия кластера от его размера.

Найдем приращение энергии ΔE_s кластера, вызванное увеличением поверхности его наружных капель. Поскольку выяснять точную форму наружных ячеек кластера довольно сложно для такой задачи, поступим просто – будем считать, что среднее увеличение поверхности наружной капли примерно такое же, как и у капли первого слоя. Тогда выражение приращения энергии ΔE_s будет иметь вид:

$$\Delta E_s = \Delta S_1 \frac{N_{\text{нар}}}{N_1} f, \quad (18.2)$$

где: ΔS_1 – суммарное приращение поверхности капель первого слоя;

$N_{\text{нар}}$ – количество наружных капель кластера;

N_1 – количество капель первого слоя;

f – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Значения ΔS_1 , $N_{\text{нар}}$ и N_1 , входящие в последнее выражение, определяются численным моделированием кластера, и зависят от его размера N , а последнюю величину f , как обычно, принимаем равной 1.

Найденные значения ΔE_s для некоторых размеров кластера показаны точками на рисунке 18.2, а плавная кривая представляет аппроксимирующую зависимость.

Таким образом, мы получили, что при образовании кластера к нему переходит не только работа A_d , затраченная на искажение системы (раздел 14), но и энергия уменьшения объема ΔE_v , а так же энергия деформации внешних капель ΔE_s . Назовем полную энергию кластера, не связанную с его движением, *присоединенной энергией*, и определим ее как сумму:

$$E_{\Pi} = A_d + \Delta E_v + \Delta E_s \quad (18.3)$$

Такое название – присоединенная энергия - несколько условно, поскольку, хотя большая часть этой энергии распределена в пространстве вокруг кластера, некоторая ее часть заключена в нем самом.

Сложив зависимости, изображенные на рис.14.3, рис.18.1 и рис.18.2, получим суммарную кривую присоединенной энергии кластера – она изображена на рис.18.3. В этом изображении есть одна условность – аргумент N , как мы знаем, может принимать только значения из ряда размеров устойчивых множеств (раздел 17), поэтому эту кривую нужно рассматривать только как аппроксимацию непрерывной функцией дискретного множества значений присоединенной энергии реальных кластеров.

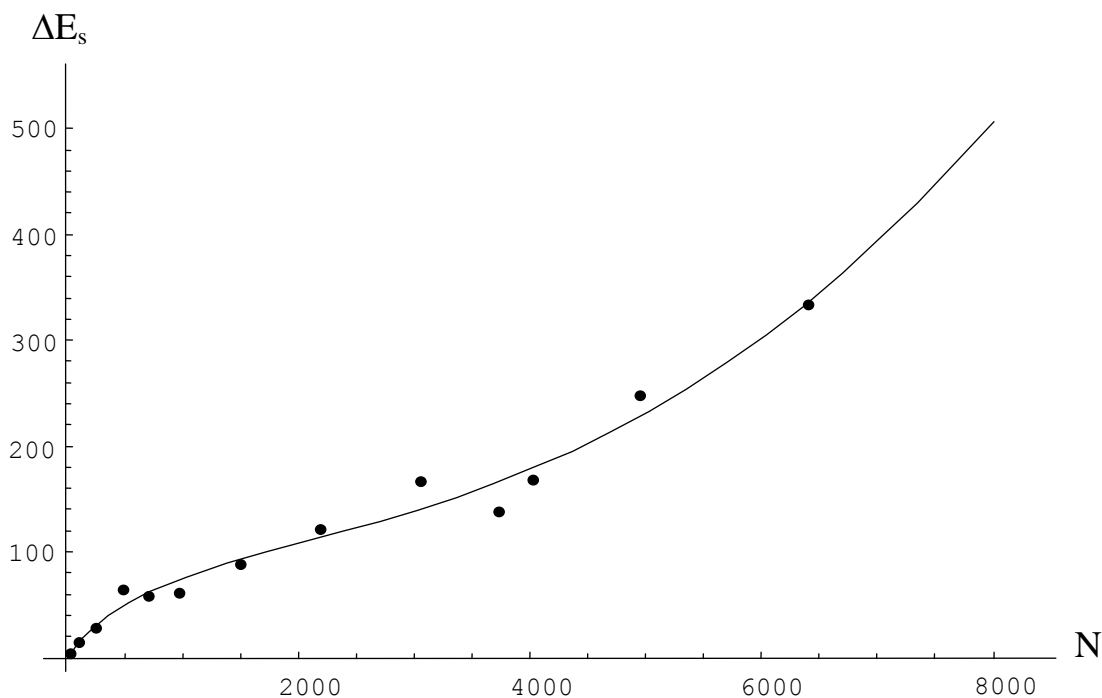


Рис.18.2. Зависимость приращения энергии наружных капель кластера от его размера.

Полученная кривая открывает новое свойство нашей системы. Прежде, чем пояснить его суть, отметим следующее. Природа кластеров позволяет, в принципе, допустить, что два или несколько кластеров могут слиться в один большой. Для этого им надо создать условия, при которых они смогли бы преодолеть огромные силы отталкивания, и, деформируясь, образовать единый кластер.

Ранее уже отмечалось, что размер кластера не может быть произвольным – его основу обязательно должно составлять устойчивое множество, размер которого является членом определенного числового ряда.

При слиянии кластеров их число капель складывается, но эта сумма, скорее всего, не будет членом указанного числового ряда, поэтому новый большой кластер вынужден будет оставить несколько своих элементов, вернув их системе, пока его размер не примет значение ближайшего меньшего из этого ряда, а форма не станет соответствовать устойчивой исходной конфигурации. Таким образом, объем нового кластера будет почти всегда меньше суммы объемов исходных кластеров.

Помимо слияния, можно предположить и возможное разделение одного большого кластера на две или более частей, каждая из которых может стать самостоятельным кластером, приведя свою форму к ближайшей устойчивой, как описано выше. Следовательно, и здесь сумма объемов новых кластеров должна быть меньше объема исходного.

Одной из причин деления может стать чрезмерно большой размер кластера, когда его симметрия может слегка нарушиться на какое-то мгновение в результате внешнего воздействия. Этим нарушением сразу «воспользуются» силы внешнего давления, величина которых на каждом участке поверхности тем больше, чем меньше кривизна этого участка, и разделят кластер на части.

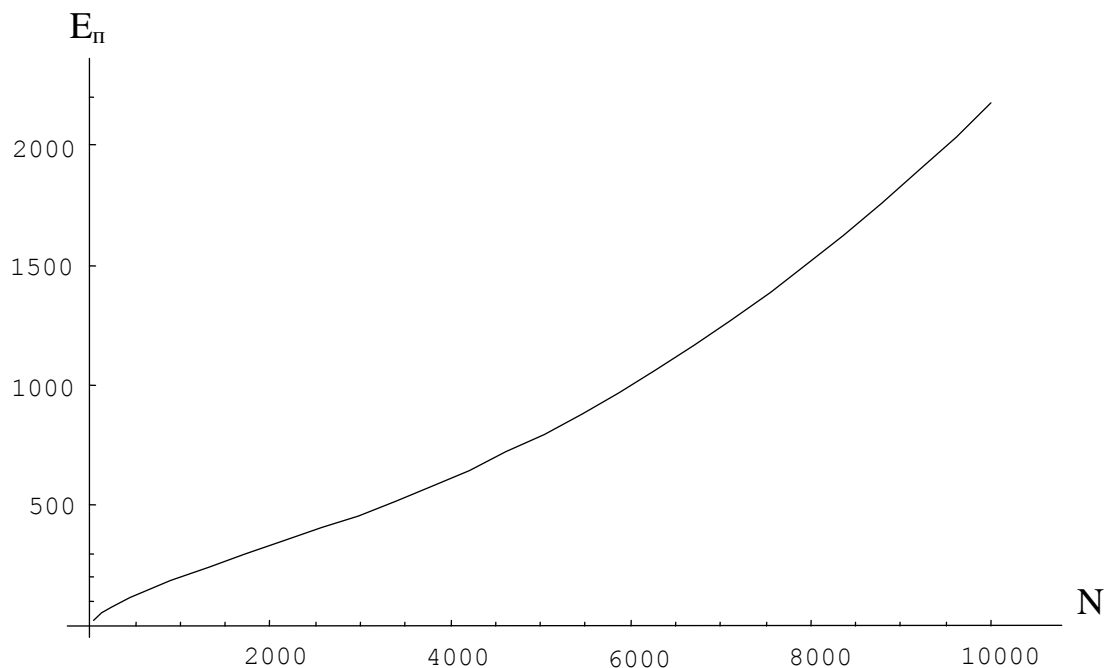


Рис.18.3. Зависимость присоединенной энергии кластера от его размера.

Теперь суть нового свойства. Допустим, мы взяли два очень маленьких одинаковых кластера объемом, например, по $N = 68$. Присоединенная энергия каждого из них равна 30 единиц. Когда эти кластеры сольются в один, то образуется кластер, ближайший устойчивый размер которого равен 135, а присоединенная энергия его, согласно найденной зависимости, станет равной 51. Элементарный расчет показывает, что при таком слиянии образуется *избыток энергии* $30 * 2 - 51 = 9$ единиц.

Составляя различные комбинации исходных размеров кластеров, мы получим разные величины избытков энергии при их слиянии, но уже ясно одно – в области малых кластеров их слияние дает высвобождение энергии.

Перейдем в область больших размеров. Представим, что два кластера по $N = 4000$ (численные значения размеров больших кластеров взяты условно, не обязательно из ряда устойчивых), имеющие присоединенную энергию каждый 615 единиц, сливаются в один, размером 8000. Этот большой кластер обладает присоединенной энергией 1515 единиц, а результат слияния выразится величиной энергии $615 * 2 - 1515 = -285$ единиц. Получили отрицательное число. Это означает, что слияние больших кластеров не только не высвобождает энергии, а наоборот – требует ее затраты.

Последний случай показывает, что высвобождение энергии у больших кластеров достигается не слиянием, а их разделением на более мелкие. При этом, как и ранее, различные варианты размеров получаемых мелких кластеров будут давать разные значения избытка энергии.

Выразим новое свойство графически в виде диаграммы, учитывая отмеченную выше условность таких непрерывных диаграмм для дискретных значений размеров кластеров. Допустим, размер кластера пробегает значения от $N = 38$ до, скажем, 5000. Каждому

значению N соответствует определенное значение присоединенной энергии $E_{\pi}(N)$. Определим новую зависимость – избыток энергии, как разность:

$$\Delta E_{\pi}(N) = 2E_{\pi}(N) - E_{\pi}(2N);$$

То есть, избыток энергии для каждого значения N равен присоединенной энергии двух одинаковых кластеров размером N , минус присоединенная энергия кластера вдвое большего размера. Такая диаграмма построена на рис.18.4.

На приведенной диаграмме обозначено характерное значение $N_0 \approx 2500$, которое делит ряд всех возможных размеров кластеров на две части – те, которые при слиянии с кластером таких же размеров выделяют энергию, и те, которые требуют затраты энергии для такого слияния.

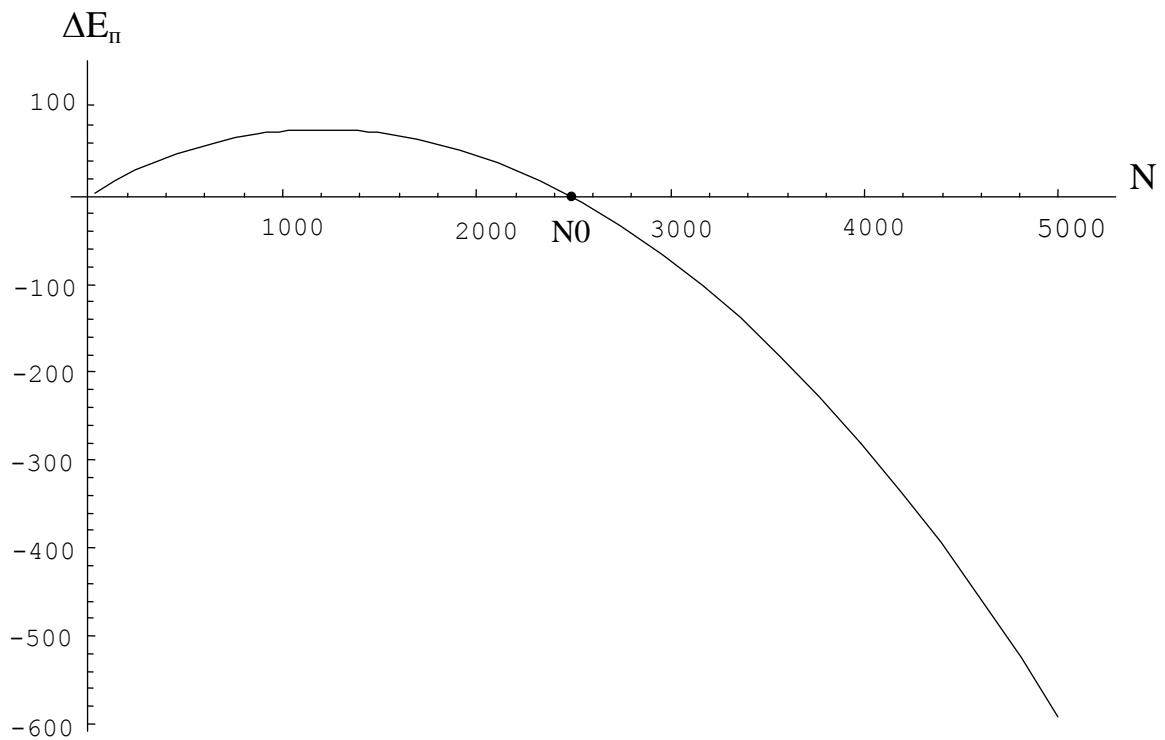


Рис.18.4. Зависимость избытка энергии слияния двух одинаковых кластеров от размера каждого из них.

Последняя кривая показывает полное значение избытка энергии, не учитывая «какими силами» он получается, т.е. какие размеры кластеров дают его. Чтобы исключить размеры кластеров и найти *удельный избыток энергии* – избыток, приходящийся на одну каплю кластера, построим зависимость $\Delta E_{\pi}/(2N)$ – она представлена на рис.18.5. Вид этой линии получился близким к прямой, но с каким-то странным «крючком» на левом конце, который, на самом деле, не следует рассматривать как какое-то особое свойство системы.

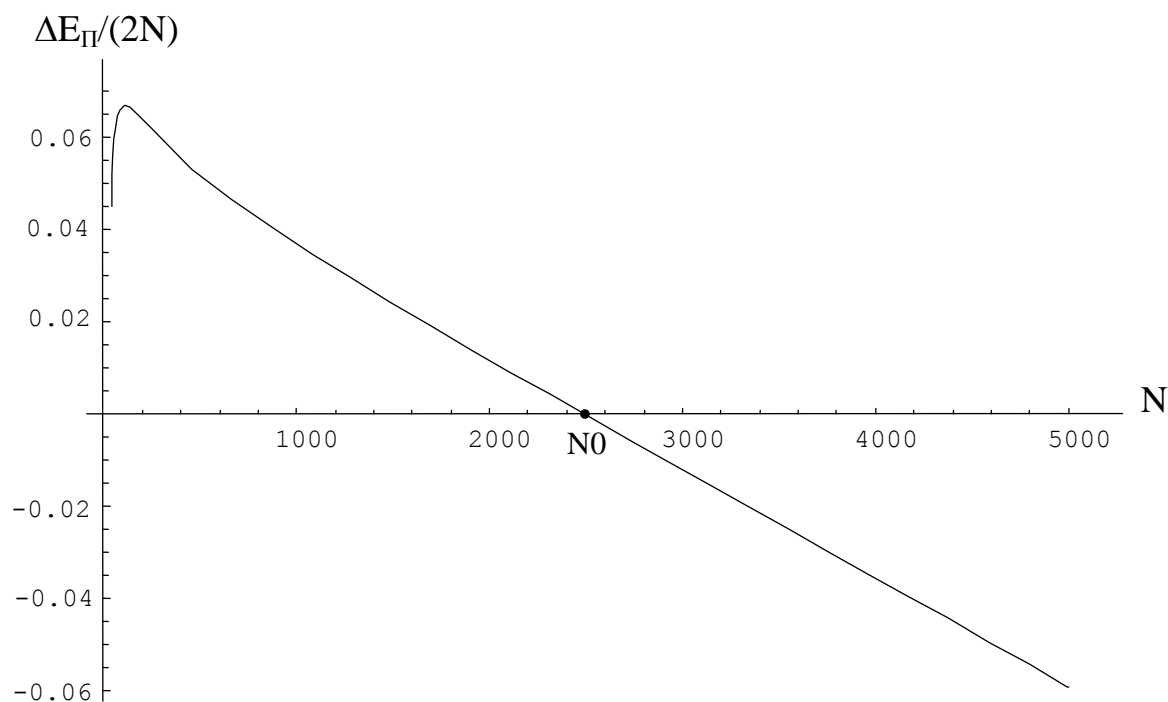


Рис.18.5. Зависимость удельного избытка энергии слияния двух одинаковых кластеров от размера каждого из них.

Дело в том, что расчетные значения энергий кластера получены довольно приблизительно, учитывая многие упрощения и особенности форм кластеров. Кроме этого, гладкая аппроксимация расчетных значений всегда неоднозначна, и зависит от набора функций, участвующих в аппроксимации. Вследствие всего этого, представленные кривые следует рассматривать только как иллюстрацию описываемых свойств системы, но никак не точные зависимости.

19. Геометрические особенности искажающих тел, представленных кластерами

На рисунке 17.6 справа внизу изображен кластер, форма которого отличается от привычной нам сферической. Как будто бы сферу слегка придавили гранями описанного около нее усеченного октаэдра, но придавили не жесткими гранями, а податливыми, так что поверхность в этих местах заметно уменьшила свою кривизну, но не стала плоской. Таким образом, поверхность этого кластера имеет разную кривизну в разных точках, сохранив кубическую симметрию. Возникает вопрос – как будет искажать структуру такое тело?

В разделе 10 мы установили, что искажающая способность единицы поверхности тела зависит от ее средней кривизны, и растет с ее уменьшением. Другими словами, чем ближе форма участка поверхности тела к плоскости, тем сильнее этот участок искажает структуру. Следовательно, каждый участок поверхности нашего тела будет искажать систему по-разному.

Рассмотрим участок Q поверхности искажающего тела, ограниченный кривой L , на котором среднюю кривизну можно считать постоянной (рис.19.1). В каждой точке кривой L выведем перпендикуляр к поверхности Q и через это множество перпендикуляров проведем поверхность P , неограниченно уходящую вверх от поверхности Q . Часть пространства, ограниченную поверхностями P и Q , назовем *конусом влияния* искажающей поверхности Q (вообще говоря, поверхность P может не быть конической, т.е. проходящей через одну точку, поэтому это название несколько условно).

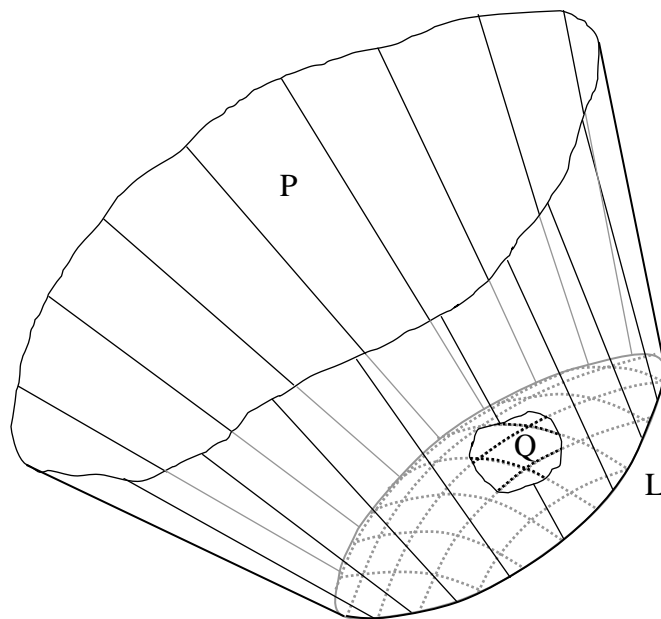


Рис. 19.1. Конус влияния искажающей поверхности.

Выскажем гипотезу: участок поверхности искажающего тела распространяет искажающее действие на систему только в пределах своего конуса влияния. Сказанное следует понимать в том смысле, что в пределах конуса влияния система искажается соразмерно кривизне этого участка. Соседний участок поверхности, с другой кривизной, будет искажать систему по-другому. Однако мы понимаем, что степень искажения

системы не может меняться скачком при переходе через границу конуса, а изменение это происходит плавно в пределах некоторой переходной области.

Итак, чтобы выяснить, как тело с переменной кривизной поверхности искажает структуру системы, необходимо разделить его поверхность на участки, на каждом из которых можно принять среднюю кривизну постоянной, провести конусы влияния участков, и считать, что в пределах каждого конуса система искажена соответственно кривизне этого участка.

Конечно, это справедливо, если мы можем провести границы участков с постоянной кривизной, но в реальных кластерах, скорее всего, кривизна поверхности изменяется плавно, и таких границ не существует. Кроме этого, здесь нас интересует не общая картина искажения, вызванная таким телом, а то, как его форма отражается на взаимодействии с другими кластерами.

Если рассматривать вопрос взаимодействия кластеров, один из которых, или оба не являются сферическими, то важно отметить, что их взаимное влияние определяется тем, какими сторонами они повернуты друг к другу. Для наблюдателя, который воспринимает искажающее тело только сферическим, один и тот же кластер с разной кривизной поверхности в разных точках, будет представляться разной величины, в зависимости от того, с какой стороны наблюдатель на него смотрит.

Соответственно, у такого кластера упругий ореол будет сложной формы, которая следует за *средним радиусом* кривизны поверхности в каждой его точке. Средним радиусом кривизны R_H мы назовем величину, обратную средней кривизне поверхности в данной точке:

$$R_H = \frac{1}{H}$$

На рис.19.2 построена 1/8 часть упругого ореола для кластера с разной кривизной поверхности. Это построение выполнено в масштабе, не отражающем реальное соотношение размеров ореола и самого кластера, а только показывает его форму.

В целом эта поверхность представляет собой 14-ти лучевого «ежа», где каждый луч располагается напротив уплощенной части поверхности кластера, т.к. на этих участках кривизна минимальна, а средний радиус кривизны наибольший. Соответственно, у этой поверхности имеется 12 впадин, которые обозначены на рисунке буквами D – они располагаются напротив вершин формы, где кривизна наибольшая. Прямая зависимость радиуса упругого ореола от радиуса кривизны поверхности в каждой ее точке следует из выражения (15.10).

Здесь необходимо условиться, что радиусом не сферического ореола в каждой его точке будем называть расстояние от центра искажающего тела до этой точки. Так на рис.19.2 радиус ореола, например, в точке D будет равен длине отрезка OD.

Как будет взаимодействовать такой упругий ореол с другим ореолом, например, сферическим, как у минимального кластера? В конце раздела 15 было отмечено, что два одинаковых сферических искажающих тела образуют устойчивое соединение – касаясь одинаковыми сферическими упругими ореолами, они обретают прочную связь – их разъединение, а тем более сближение, требует значительных усилий.

В данном же случае взаимодействуют разные формы ореолов – у одной радиус колеблется от некоторого минимального до некоторого максимального значения, а у другой – постоянный.

Если, как мы отметили, для устойчивого положения двух тел им нужно коснуться упругими ореолами одинакового радиуса, то чтобы обрести такое положение, тело со сферическим ореолом будет «искать» точку у другого ореола, где у него такой же радиус, как и у первого. В данном случае минимальный кластер обязательно найдет такую точку у ореола большого кластера, поскольку у второго есть несколько точек на поверхности, где кривизна равна кривизне поверхности первого. Поэтому сферический ореол

минимального кластера обязательно «пристроится» в нужном ему месте к ореолу большого кластера.

Но таких точек на всей поверхности, часть которой изображена на рис. 19.2, будет не менее 12 – по числу впадин. Вероятнее всего, это будет одна из точек D – минимальный радиус поверхности большого кластера не больше радиуса поверхности меньшего кластера, а, скорее всего, равен ему.

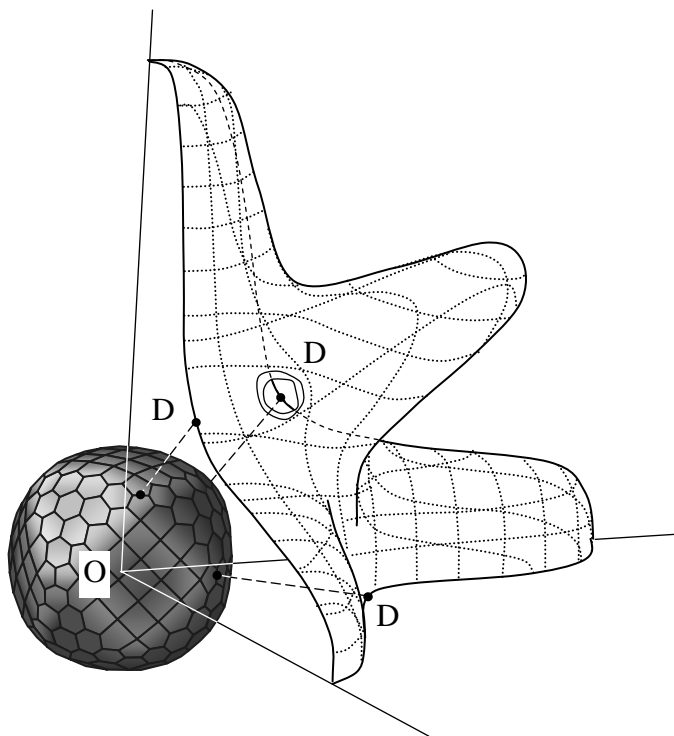


Рис.19.2. 1/8 часть формы упругого ореола кластера с переменной кривизной поверхности.

В результате, сферический ореол меньшего кластера присоединится к одной из точек D ореола большого кластера, и между кластерами установится связь, направление которой жестко привязано к поверхности большого кластера – как показано на рис.19.3 (здесь соотношение расстояния между кластерами и их размерами сильно уменьшено).

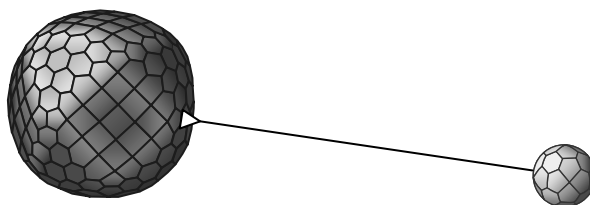


Рис.19.3. Направленная связь кластеров.

Это значит, что если принудительно поворачивать большой кластер вокруг его оси, то

меньший кластер будет перемещаться так, как если бы он был соединен с первым кластером жестким рычагом. Таким образом, получается *направленная связь*.

Теперь представим, что рядом с рассмотренной парой кластеров оказывается еще один сферический кластер. Влияние на него большого кластера приводит к тому, это новое тело со своим ореолом «скатывается» в свободную впадину ореола большого кластера. Если это свободное углубление оказывается рядом с уже занятым, то получим картину, изображенную на рис.19.4. Здесь направленные связи, как и ранее, условно изображены прямыми отрезками, соединяющими кластеры.

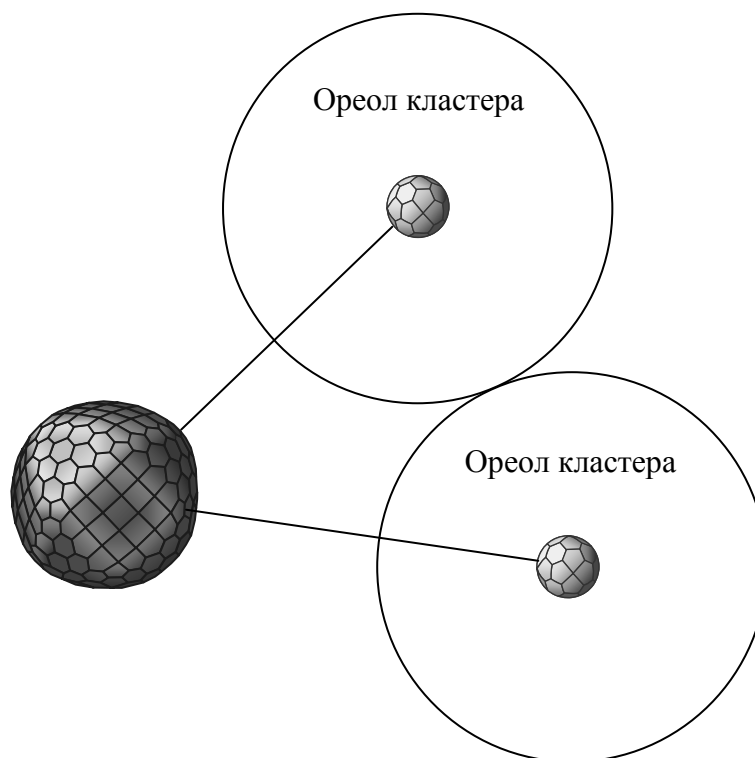


Рис.19.4. Кластеры с двумя направленными связями.

Однако последний случай возможен, если сферические ореолы малых кластеров не «наползают» друг на друга и могут соседствовать в таком положении. Если же такое соседство невозможно, новый кластер не располагается в углублении рядом с уже занятым (точки D на рис.19.2), а попадает в более удаленное углубление. Один из таких случаев изображен на рис.19.5.

Предполагая, что близкое расположение между собой малых кластеров (как на рис.19.4) невозможно, дальнейшее добавление малых кластеров в нашу конструкцию может привести только к двум окончательным вариантам – они изображены на рис.19.6. В одном случае центры всех кластеров лежат в одной плоскости, а в другом – в двух перпендикулярных плоскостях.

Как видим, здесь все возможные положения малых кластеров около большого кластера данной формы заняты, и других вариантов быть не может.

Мы рассмотрели возможные сочетания устойчивого взаимного расположения одного большого кластера с переменной кривизной поверхности, имеющего кубическую симметрию, и минимальных сферических кластеров. Если же взять много одинаковых кластеров несферической формы, то их устойчивое взаимное положение может

образовать пространственную конструкцию, наподобие той, которая собирается из жестких стержней, где каждый стержень – это направленная связь.

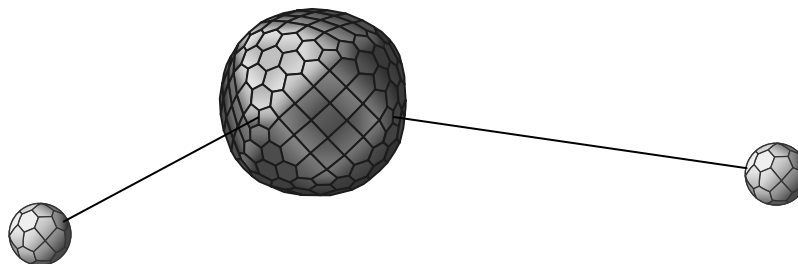


Рис.19.5. Разнесенные направленные связи.

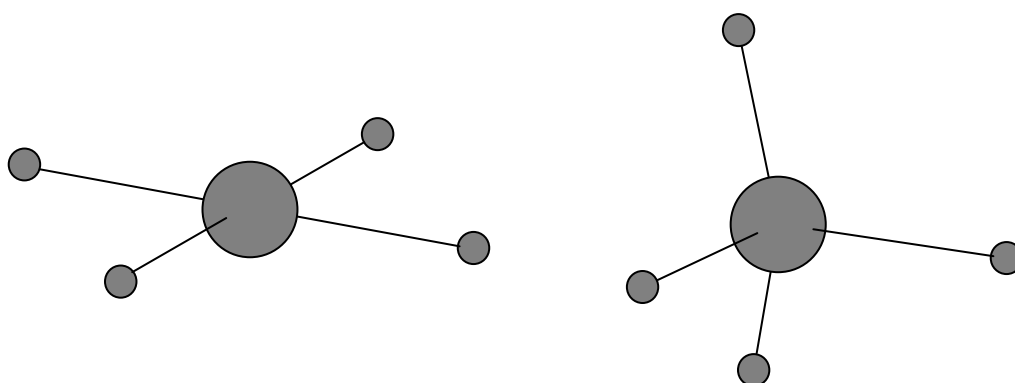


Рис.19.6. Возможные варианты заполненных направленных связей.

Еще более сложной будет конструкция, собранная из двух, или более видов несферических кластеров разных размеров. Их возможные сочетания могут дать такое многообразие устойчивых соединений, исследование которых нужно выделить в отдельную тему.

20. Эволюция системы

Изучив законы, действующие в системе сжатых капель, мы вправе поставить вопрос – что будет происходить в ней, предоставленной самой себе, на протяжении сколь угодно большого периода времени? Попробуем представить это, полагая, что система заполняет собой практически неограниченное пространство.

Четыре исходных условия, изложенные в начале этой книги, задают общее строение системы, но не предполагают никаких процессов в ней. И только пятое условие, введенное в разделе 17, вносит в нее «жизнь», дает возможность изменений и позволяет нам рассматривать вопрос об ее эволюции. Повторим это условие: во всем множестве сжатых капель постоянно происходят колебания различной частоты и амплитуды, волны которых распространяются по системе в различных направлениях.

В том же разделе 17 описан механизм выделения из однородной структуры системы отдельных групп элементов – кластеров в результате случайного совпадения нескольких продольных волн. Крайне малая вероятность наступления этого события в данном случае ничего не значит – безмерная протяженность системы во всех направлениях делает образование кластеров обыденным явлением.

Но это событие – образование кластера – может закончиться и неудачно. Если кластер оказался меньше, чем минимально возможный, или получил достаточный размер, но недостаточную скорость для устойчивого существования, он сразу же распадется на составные элементы, которые опять займут свое место в структуре системы. И за этот короткий промежуток времени та энергия, которая сконцентрировалась в этом месте, быстро вернется в систему в виде тех же колебаний.

Понятно, что нас интересуют удачные исходы, когда кластер образовался нужного размера, получил достаточную скорость и унес на себе часть энергии колебаний, уменьшив их интенсивность. При этом, как мы помним, наиболее вероятно образование самых маленьких кластеров, а чем крупнее кластер, тем вероятность его появления меньше.

Если зафиксировать момент начала всех процессов в системе, то через некоторый, пусть очень большой период времени, в ней будет уже много кластеров, летящих во всевозможных направлениях с различными скоростями, превышающими критическое значение.

Если двум кластерам случится столкнуться друг с другом на большой скорости, то исход очевиден – разбившись на мелкие фрагменты, которые меньше минимального устойчивого размера, они «растают» в системе, вернув ей свою энергию.

Если же столкнутся два крупных кластера, а какой-то осколок окажется таким, что в нем содержится гладкое множество элементов, то он сбросит с себя все лишние элементы, оставив только эту гладкую сердцевину. Однако сама по себе гладкость еще не обеспечивает стабильности. Имея не компактную, а уплощенную или вытянутую форму, этот кластер неминуемо будет раздавлен неравномерным внешним давлением на несколько частей. В конце концов, остаться существовать сможет только гладкая компактная часть осколка, если она, к тому же, обладает достаточной скоростью.

Теперь представим, что имеется множество кластеров, пронизывающих систему во всевозможных направлениях, избежавших столкновения и последующего разрушения – с этого момента будем называть их частицами. Все они находятся под действием сил взаимного влияния.

Когда частицы пролетают мимо друг друга в противоположных или перекрестных направлениях, или даже в одном направлении, но с разными скоростями, силы взаимного влияния почти не отражаются на их дальнейших траекториях – очень мало время их взаимодействия.

Если же частицы движутся в одном направлении с одинаковыми, или очень близкими скоростями, то у них достаточно времени, чтобы взаимные силы начали постепенно их сближать. Ввиду малости этих сил у отдельных частиц, время их сближения может оказаться очень большим, но рано или поздно некоторое количество частиц образует *сгусток*. Чем больше в нем концентрация частиц, тем сильнее его влияние на другие частицы, летящие рядом, и этот сгусток начинает все быстрее и быстрее расти.

Этому росту способствует и то, что своим влиянием сгусток может затрагивать частицы, пролетающие не совсем в том же направлении, или не совсем с той же скоростью – ему требуется уже меньше времени, чтобы присоединить к себе нового члена.

Вполне закономерно, что во всем однонаправленном потоке частиц подобных сгустков может образоваться достаточно много. Их взаимное влияние значительно сильнее, чем у отдельных частиц, поэтому взаимодействие сгустков ускоряется, приводя к их укрупнению – начинается лавинный процесс образования *облаков* частиц. Далее начинают взаимодействовать отдельные облака.

Двигаясь в одну сторону по параллельным или близким к этому траекториям, облака могут оказаться недалеко друг от друга только в результате разности скоростей. Когда одно облако проходит мимо другого, силы взаимного влияния удерживают их рядом, а разность скоростей приводит к их совместному вращению вокруг общего центра масс.

Дальнейшее действие взаимных сил приводит к слиянию облаков в одно большое, которое, двигаясь поступательно, вращается. Важно отметить, что при такой причине начала вращения ось вращения облака располагается перпендикулярно вектору скорости центра масс.

Присоединение к этому облаку новых сгустков частиц, которые могут ускорить, или, наоборот, замедлить его вращение, равновероятно, поэтому эти мелкие добавки не влияют заметно ни на темп вращения облака, ни на ориентацию его оси. В конечном итоге результирующее вращение облака определяется условиями самого последнего слияния двух его крупных составляющих.

Обращая внимание на отдельные факторы, приводящие к формированию мощного облака частиц, мы должны помнить, что все это множество вызывает сильное искажение в системе. В таких условиях действующие на частицы силы приводят к сжатию облака в плотное сферическое образование.

Описывая развитие событий в системе, мы исходим из ее законов, которые ранее найдены. В то же время, мы не можем предвидеть всего многообразия сочетаний результатов их действия, которые, возможно, могут привести к самым неожиданным эффектам. Поэтому будем описывать только то, что напрямую и с очевидностью следует из известных свойств системы.

Итак, мы имеем движущееся в пространстве, вращающееся огромное сферическое облако частиц, основная часть которых – кластеры минимального устойчивого размера. Отдельные частицы внутри облака постоянно находятся в хаотическом относительном движении, поскольку на них действуют силы, величина и направление которых зависит от взаимного положения близлежащих частиц. Они сталкиваются своими упругими ореолами, отскакивают и сталкиваются вновь, редко приближаясь друг к другу ближе равновесного расстояния.

Дальнейшее сжатие облака приводит к тому, что в его середине, где сжатие наиболее сильно, на частицы начинают действовать огромные сближающие силы. Под их действием некоторые частицы, добавив к этому свою кинетическую энергию хаотического движения, преодолевают силы взаимного отталкивания и сближаются не только до касания, но и взаимного деформирования, приводящего к их слиянию.

При этом, как мы знаем, выделяется излишек присоединенной энергии слившихся частиц, часть которого переходит в колебания среды, а другая часть увеличивает кинетическую энергию образовавшейся новой частицы. Так постепенно начинает

возвращаться в систему энергия колебаний, некогда унесенная из нее образованием кластеров.

Таким образом, в середине облака начинается выделение энергии слияния кластеров. Энергия, выделившаяся в виде колебаний среды, покидает облако и расходится по системе, а другая часть, в виде увеличенной кинетической энергии продуктов слияния, вызывает общее ускорение хаотического движения частиц.

Увеличение кинетической энергии способствует повышению интенсивности процесса слияния кластеров и замедлению дальнейшего сжатия облака – наступает период его равновесного состояния.

В результате постоянного расходования мелких кластеров их концентрация в середине облака со временем уменьшается, а более крупных – растет. При этом перемешивания содержимого, по всей видимости, не происходит, и новые мелкие кластеры не проникают из периферии в середину.

С уменьшением концентрации мелких кластеров их слияние становится все реже, а для слияния более крупных недостаточно условий – выделение энергии замедляется, и снижается противодействие дальнейшему сжатию облака – равновесие нарушается. В результате облако начинает сжиматься сильнее, и наступают условия для слияния мелких кластеров в менее глубоких слоях, где их концентрация еще осталась высокой.

В это же время в центре создаются условия для слияния крупных кластеров – продуктов первой реакции. Но, как мы знаем, чем крупнее кластеры, тем меньше удельное энерговыделение их слияния, поэтому интенсивность этой энергии значительно меньше, чем в первом случае. В конце концов, истощается и она, а равновесие снова нарушается в сторону дальнейшего сжатия – в центре облака создаются условия для начала реакции третьего уровня, и т.д.

Таким образом, процессы, начинающиеся в самом центре, распространяются в облаке сферической волной к периферии и останавливаются там, где уже нет условий для слияния. С каждым новым циклом выделение энергии становится все меньше и меньше, и облако продолжает неумолимо сжиматься.

Как влияет сжатие облака на угловую скорость его вращения? Ответить на этот вопрос нам поможет теоретическая механика. Будем рассматривать облако частиц как сплошной однородный шар, вращающийся вокруг своей оси, на который не действуют никакие внешние силы. Кинетический момент L этого тела равен:

$$L = I \omega, \quad (20.1)$$

где: I – момент инерции облака относительно оси вращения;
 ω – угловая скорость вращения.

Известно, что если на вращающееся тело не действуют внешние силы, создающие момент относительно оси вращения, то кинетический момент тела остается постоянным, какие бы изменения в нем ни происходили, т.е. $L = \text{const}$.

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через его центр, согласно формуле, приведенной в [1] равен:

$$I = \frac{2}{5} M R^2, \quad (20.2)$$

где: M – масса шара;
 R – радиус шара.

Принятие нашего облака в виде однородного шара не совсем точно – оно и не однородно, оно и не шар (в результате вращения облако имеет, скорее всего, форму

слегка сплюснутого эллипсоида), но в данном случае это не имеет принципиального значения.

Итак, из (20.2) видим, что уменьшение радиуса облака при неизменной массе приводит к уменьшению его момента инерции. Тогда постоянство его кинетического момента будет поддерживаться только за счет увеличения угловой скорости вращения. Таким образом, по мере сжатия, облако раскручивается все сильнее и сильнее.

Как мы помним, вращение облака и его перемещение в пространстве происходит в одной плоскости, а такое движение в кинематике называется *плоскопараллельным*. Теперь вспомним кинематику плоскопараллельного движения. При таком движении все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях, а точки, лежащие на одном перпендикуляре к этим плоскостям, описывают одинаковые кривые – как показано на рис.20.1.

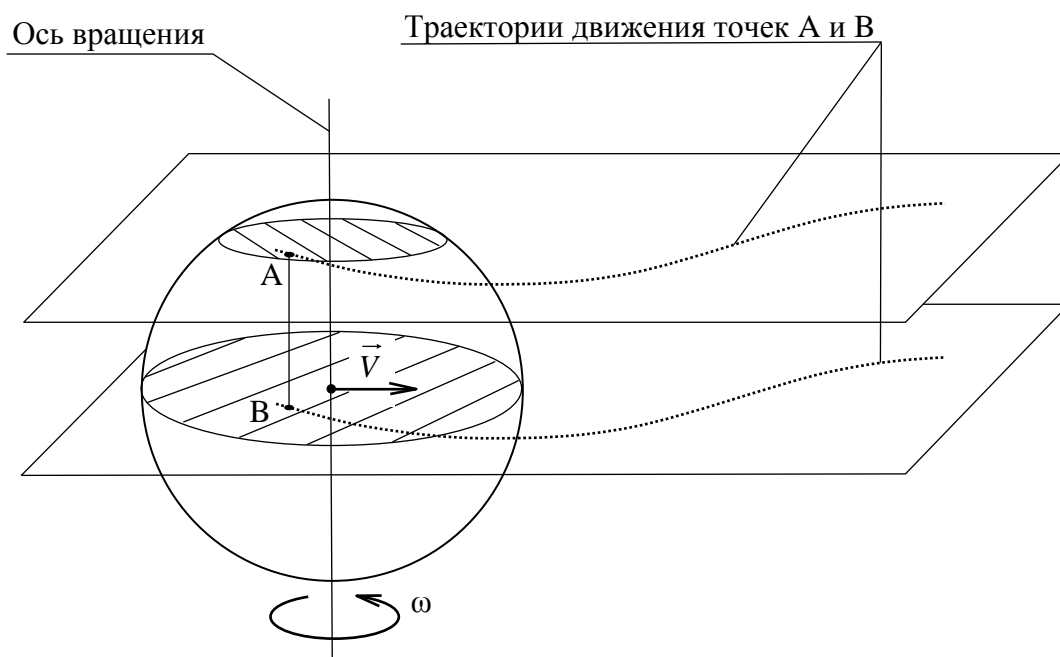


Рис.20.1. Плоскопараллельное движение тела.

Такое движение характерно тем, что здесь можно рассматривать движение только одного сечения тела, происходящее на плоскости, а любая точка этого сечения будет описывать движение любой точки тела, лежащей на том же перпендикуляре.

Рассмотрим движение одного сечения нашего облака – круга, проходящего через его центр, в плоскости движения. Эта плоская фигура вращается вокруг своего центра С с угловой скоростью ω , и перемещается по плоскости со скоростью V .

Обычным приемом кинематики заменяем оба эти движения одним – вращением с той же угловой скоростью ω вокруг новой точки C_v , которую называют *мгновенным центром вращения*. Положение этой точки на плоскости легко найти, вычислив расстояние r по простой формуле:

$$r = \frac{V}{\omega} \quad (20.3)$$

Теперь, как показано на рис.20.2, из центра C фигуры проводим перпендикуляр к направлению вектора \vec{V} в ту сторону, как если бы этот вектор повернулся на 90° в направлении вращения всей фигуры. Отложив на этом перпендикуляре от точки C отрезок длиной r , получим искомый мгновенный центр вращения C_v .

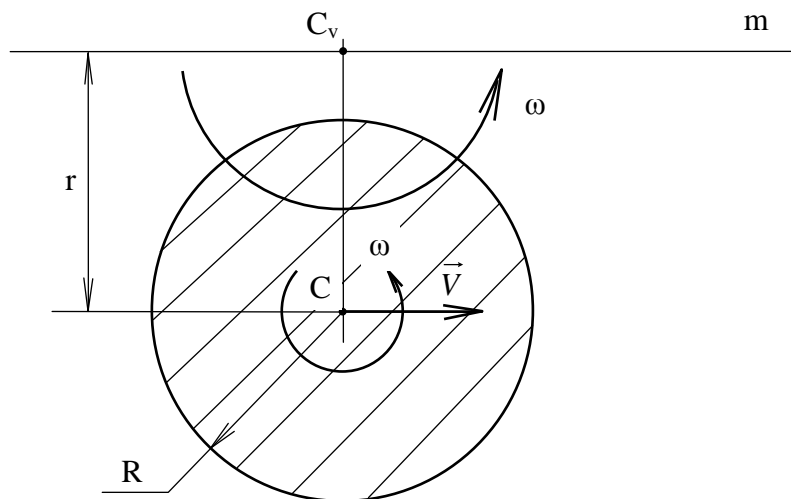


Рис.20.2. Замена двух движений одним вращением.

При таком представлении наша плоская фигура совершает только одно движение – вращение вокруг точки C_v , которая в данное мгновение неподвижна, но в следующее мгновение и сама фигура и эта точка займут другое положение. Таким образом, все движение фигуры представляется как непрерывная последовательность вращений вокруг мгновенных центров, которые пробегают все точки прямой m (рис.20.2) в ту же сторону и с той же скоростью V .

Пока найденное по формуле (20.3) расстояние r больше радиуса R фигуры, мгновенный центр вращения лежит вне ее пределов, и ничего интересного не происходит. Когда же угловая скорость ω достигает такого значения, что r становится меньше R , мгновенный центр вращения оказывается в пределах самой фигуры – на движущемся теле появляется неподвижная точка.

Вернемся к сферическому облаку кластеров. Поскольку это тело объемное, то в отличие от плоской фигуры у него будет не мгновенный центр вращения, а *мгновенная ось вращения*, параллельная его настоящей оси вращения.

Когда наше облако раскручивается настолько, что его мгновенная ось вращения заходит в пределы самого облака, в нем начинают происходить грандиозные события – частицы облака, попадающие в район этой оси, оказываются мгновенно неподвижными относительно среды, и сразу же распадаются, выделяя всю свою энергию.

Мы знаем, что для распада кластерам достаточно всего лишь снизить скорость ниже критической, поэтому в облаке начинают распадаться все кластеры, попадающие в некоторый объем V_p , очерченный вокруг мгновенной оси вращения – как показано на рис.20.3.

Одновременный распад кластеров, находящихся в объеме V_p , сопровождается небывалым выделением энергии в виде колебаний. Учитывая форму области, в которой распадаются кластеры, распространение колебаний происходит не равномерно во все стороны, а в большей мере вдоль мгновенной оси вращения. Это можно представить как

трубу, открытую с двух концов, в которой сгорает мощный заряд пороха – огненные струи, вырываясь из концов трубы, образуют два противоположно направленных узких потока энергии.

Распадающиеся кластеры возвращают системе всю свою энергию, которую они когда-то получили от нее в виде двух составляющих – кинетической и присоединенной (разделы 17, 18). Однако скорость кластера в момент образования была значительно выше, чем во время распада – во втором случае он кинематически снизил скорость, находясь в определенной точке единого агрегата частиц в его сложном движении. Следовательно, к этому моменту его кинетическая энергия перешла в другой вид, в котором она и вернулась системе с распадом кластера. Так в какой же вид переходит кинетическая энергия частицы, когда она изменяет свою скорость, двигаясь в составе единого множества?

Вопрос этот касается не только множества отдельных частиц. В твердом теле, совершающем сложное движение, происходит то же самое. Например, в колесе поезда, катящемся по рельсу, каждая точка обода за один оборот изменяет свою абсолютную скорость от нуля до некоторого максимума. Следовательно, каждый элементарный объем материала обода за один оборот изменяет свою кинетическую энергию так же от нуля до некоторой величины. Значит, кинетическая энергия каждого элементарного объема колеса за каждый оборот куда-то переходит и возвращается обратно.

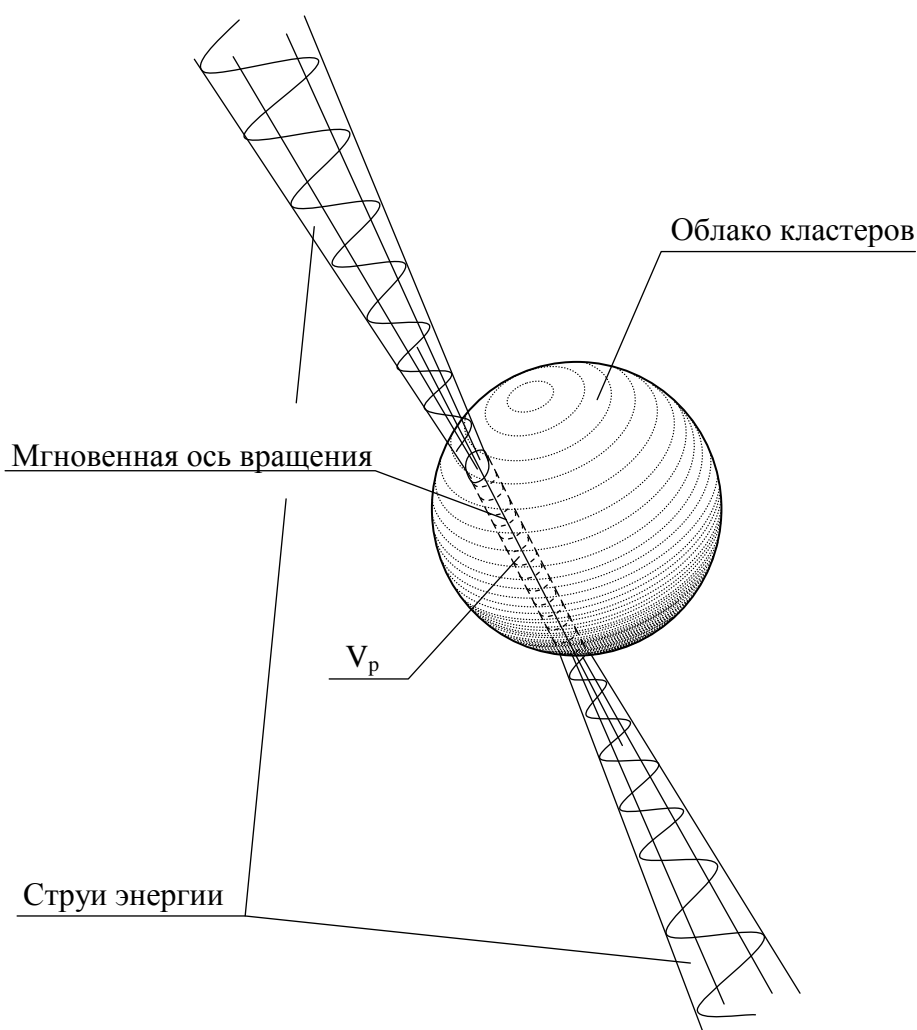


Рис.20.3. Выделение энергии распада кластеров.

Говоря только о множестве взаимодействующих частиц, отметим, что все они обладают потенциальной энергией взаимодействия. Если на частицы действуют силы взаимного притяжения, то чем дальше одна частица находится от остальных, тем больше у нее эта энергия. Понятно, что потенциальная энергия взаимодействия может переходить в кинетическую, и наоборот.

Представим, что множество частиц совершает какое-то сложное движение, двигаясь как целое. Если исключить из рассмотрения хаотическое движение частиц, а считать их неподвижными относительно всего множества, то в общем движении этого образования они будут иметь разные абсолютные скорости, как если бы они были точками твердого тела.

В процессе движения множества каждая частица будет все время менять свою абсолютную скорость, следовательно, будет меняться ее кинетическая энергия. Если некоторая частица совпадет с мгновенным центром вращения всего множества, ее абсолютная скорость, как и кинетическая энергия, в этот момент станет равной нулю. В это же время все остальные частицы движутся вокруг нее, и чем они дальше, тем с большей скоростью. Но движение любой частицы по окружности сопровождается действием на нее центробежной силы, которая отдаляет ее от центра.

Если сопоставлять эту последнюю частицу с той, которая оказалась в центре вращения, то увеличение расстояния между ними приведет к одинаковому увеличению у них потенциальной энергии. Но если рассматривать только центральную частицу, то она окажется единственной, от которой отделились все остальные частицы множества под действием центробежных сил, следовательно, потенциальная энергия у нее стала наибольшей из всех.

В связи с этим предлагается гипотеза: при любом движении множества взаимодействующих частиц, как целого, сумма кинетической и потенциальной энергии у каждой частицы в один и тот же момент времени одинакова у всех частиц множества.

Применяя эту гипотезу к массовому распаду кластеров в нашем облаке, будем считать, что эти кластеры возвращают системе свою утраченную кинетическую энергию в виде потенциальной, которая выражается в повышенной деформации капель системы, окружающих исчезающий кластер.

С началом процесса распада кластеров, масса облака уже не остается постоянной, а постепенно уменьшается. В то же время его сжатие продолжается, а угловая скорость увеличивается. При этом мгновенная ось вращения приближается к действительной оси вращения, никогда не достигая ее.

Последующее уменьшение размеров облака будет приводить к сокращению объема активной области V_p , где происходит распад, и мощность струй будет иссякать.

Что будет дальше происходить с этим образованием, ничего определенного сказать нельзя. Здесь большую роль будет играть следующее обстоятельство. Мы ранее не упоминали об этом, но для распада кластера требуется какое-то время, пусть ничтожно малое, но вполне определенное. Возможно, если кластер распадается от недостаточной скорости, длительность распада зависит от того, насколько его скорость меньше критической – чем она ближе, тем медленнее распад.

В таком случае наш быстровращающийся массив кластеров, в конце концов, может достичь такой угловой скорости, при которой время, которое кластеры находятся в активной зоне, будет уже недостаточным для их распада. Они будут проскакивать эту зону, пока силы инерции удерживают их в цельном виде. В этом состоянии массив перестает выделять энергию и остается таким быстровращающимся шаром неопределенное время.

Если рядом с этим объектом окажутся сгустки частиц, то они неминуемо к нему присоединятся, увеличив его массу. Он будет взаимодействовать и с крупными облаками частиц, окажись они в пределах его влияния, но результат этого взаимодействия трудно предположить.

2003 – 2013 гг.
г. Воронеж

Послесловие к первой части

Ознакомившись с системой сжатых капель, читатель без труда угадает в ней модель межзвездной среды – мирового эфира, о существовании которого уже много лет идут научные споры. Не будет преувеличением назвать этот вопрос ключевым в современном естествознании. Каждая из сторон этого спора должна по-своему объяснить все проявления реального мира, но у сторонников эфира больше вариантов – признание мировой среды требует предложения ее модели, которая, по возможности, объясняла бы все известные явления.

Представленная в этой книге однокомпонентная система сжатых капель является, по мнению автора, основной составляющей модели эфира, которая отвечает за возникновение и исчезновение частиц материи, наличие у них энергии, гравитацию, молекулярные связи, энерговыделение при слиянии мелких и делении крупных частиц.

Скорость распространения возмущений в этой среде – это именно та скорость, которую приписывают распространению гравитации, начиная с П.С.Лапласа – скорость, на много порядков превышающую скорость света. Соответственно, с такой же скоростью распространяются колебания, которые постоянно происходят в системе. Аналогом этих колебаний в реальности, по мнению автора, являются гамма- и рентгеновское излучение.

Другая составляющая предлагаемой модели эфира будет рассмотрена во второй части книги. Эта составляющая - тоже отдельные капли жидкости, только со значительно меньшим коэффициентом поверхностного натяжения, чем у капель основной компоненты, и располагаются они в пустотах рассмотренной системы. Именно эта вторая компонента данной модели отвечает за электричество и магнетизм, в ней распространяется видимый свет и т.н. электромагнитные волны. То, что эта компонента более мягкая, объясняет значительно меньшую скорость распространения в ней возмущений.

Система, состоящая из отдельных капель жидкости, всегда насквозь пронизана сетью пустот. Такая же сеть пустот имеется и в системе второй компоненты нашей модели, но вопрос, чем она заполнена, можно решать только, найдя те проявления реального мира, которые нельзя объяснить первыми двумя компонентами.

Литература

1. Воронков, Иван Михайлович. Курс теоретической механики: учебник / И.М.Воронков,.- М.; Л.: Физматлит, 1965.
2. Квант: Науч. попул. физ.-мат. журн. / АН СССР. – М., 1970-. №2 (1973).
3. Тот, Ласло Фейеш. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве / Л.Ф.Тот; Пер. с нем. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958.
4. Фабрикант, Николай Яковлевич. Аэродинамика. Общий курс / Н.Я.Фабрикант. -М.: Наука, 1964.
5. Хадвигер, Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии / Г.Хадвигер; Пер. с нем. – М. : Наука, 1966.
6. Шаскольская, Марианна Петровна. Кристаллография : учебник для студ. втузов / М.П.Шаскольская. – М. : Высшая школа, 1976.
7. Casti, John L. Mathematical mountaintops: the five famous problems of all time / John L. Casti. – Oxford : Oxford University Press, 2001.

Предметный указатель

- Вершина острая 68
- тупая 68
Вид ячейки пятиугольный 102
- четырехугольный 102
- шестиугольный 102
Геометрия жидких тел 6
- физическая 7
Гладкость множества ромбододекаэдров 148
Грани цепочки внутренние 80
Группа симметрии пространственная кубическая 62
Движение плоскопараллельное 176
Деформация закрытая 14
- открытая 14
Диаграмма избыточных давлений
объемная 122
Задача изопериметрическая 32
Зона 157
- наибольших скоростей 157
- переходная 5
- регулярная 5
Избыток энергии 165
- - удельный 165
Индекс многогранника 30
- ячейки 29
Канал 80
Каркас многогранника 31
Кластер 152
- минимальный 160
- элементов 152
Компактность множества
ромбододекаэдров 146
Контейнер 14
Конус влияния 168
Конфигурация исходная 86
Коэффициент контакта 137
- присоединенной массы 95
Кривизна поверхности средняя 10
Кубооктаэдр 72
Многогранник двойственный 71
- дуальный 71
Множество минимальное гладкое 149
- устойчивое 159
Направление системы большое 79
- главное 79
- малое 79
- среднее 79
Направления поверхности главные 16
Неравенство изопериметрическое 34
Неравномерность повышения давления
относительная 122
Номер слоя абсолютный 121
Облако частиц 174
Объем перемещенный 23
- присоединенной массы 95
Ореол упругий 145
Ось большая 69
- вращения мгновенная 177
- малая 69
- средняя 69
Парадокс Даламбера – Эйлера 94
Параллелоэдр 69
Плечо сил среднее 143
Плоскость граневая 79
Поверхность контакта 8
- равного давления 124
- свободная 8
- срединная слоя 91
Полость кубическая 82
- тетраэдрическая 82
Принцип симметрии общий 75
- суперпозиции Кюри 84
Пятно контакта 126
Работа искажения 93
Радиус кривизны главный 16
- - средний 169
Расстояние между формами
по объему 24
- равновесное 141
Решетка 65
- кубическая
гранецентрированная 65
Ромбододекаэдр 67
- скругленный 68
Связь направленная 171
Сгусток частиц 174
Силы объемные 8
- поверхностные 8

Симметрия кубическая 62	Упаковка плотная кубическая 63
- тетраэдрическая 149	
Система однокомпонентная 7	Форма ячейки плоскогранная 114
- сжатых капель 6	
- стандартная 76	Центр вращения мгновенный 176
Скорость критическая 154	Цепочка 80
Слой 85	- ячеек 80
- фиктивный 105	
Степень сжатия системы 76	Ширина зоны 157
Сфера искажающая 85	
	Энергия присоединённая 163
Тело искажающее 84	
Тип котловины 11	Ячейка 21
- многогранника 31	- Дирихле-Вороного 64
- седловины 11	- сжатой капли 21
Точка округления 17	
- омбилическая 17	
- шаровая 17	

Перечень гипотез

1. У выпуклого многогранника заданного типа и определенного объема индекс и площадь поверхности имеют одинаковый характер зависимости от его конфигурации. 32
2. Работа, затраченная на деформацию капли жидкости, аккумулируется в ее поверхности. 36
3. В системе сжатых капель искажение распространяется на любое, сколь угодно большое расстояние от искажающего тела. 90
4. Работа, затраченная на преобразование поверхности искажающего тела, зависит только от начальной и конечной формы этой поверхности, и не зависит от пути ее изменения. 125
5. Если элемент принадлежит некоторому множеству и имеет более шести открытых граней, то он не может двигаться относительно окружающих элементов системы вместе с этим множеством. 158
6. Участок поверхности искажающего тела распространяет искажающее действие на систему только в пределах своего конуса влияния. 168
7. При любом движении множества взаимодействующих частиц, как целого, сумма кинетической и потенциальной энергии у каждой частицы в один и тот же момент времени одинакова у всех частиц множества. 179